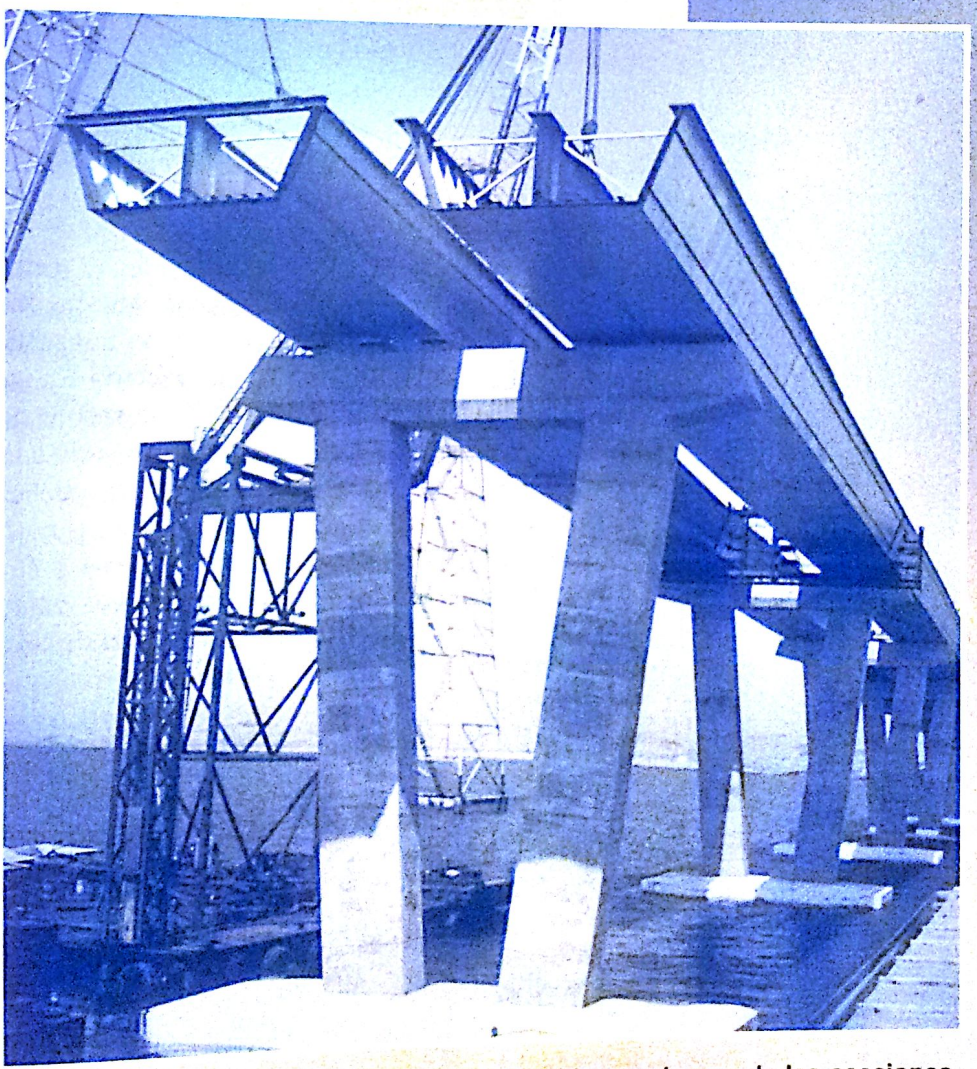
CAPÍTULO

6

Esfuerzos cortantes en vigas y elementos de pared delgada



Una cubierta de concreto reforzada será unida a cada una de las secciones de acero que se muestra para formar un puente con largueros de caja compuesta. En este capítulo se determinarán los esfuerzos cortantes en varios tipos de vigas y largueros.

6.1 INTRODUCCIÓN

En la sección 5.1 se vio que una carga transversal aplicada a una viga resultará en esfuerzos normales y cortantes en cualquier sección transversal dada de la viga. Los esfuerzos normales se crean por el momento flector **M** en dicha sección y los esfuerzos cortantes por el cortante **V**. Como el criterio dominante en el diseño de una viga por resistencia es el máximo valor del esfuerzo normal en la viga, en el capítulo 5 el análisis se limitó a la determinación de los esfuerzos normales. Los esfuerzos cortantes, sin embargo, son importantes, particularmente en el diseño de vigas cortas y gruesas, y su estudio será el tema de la primera parte de este capítulo.

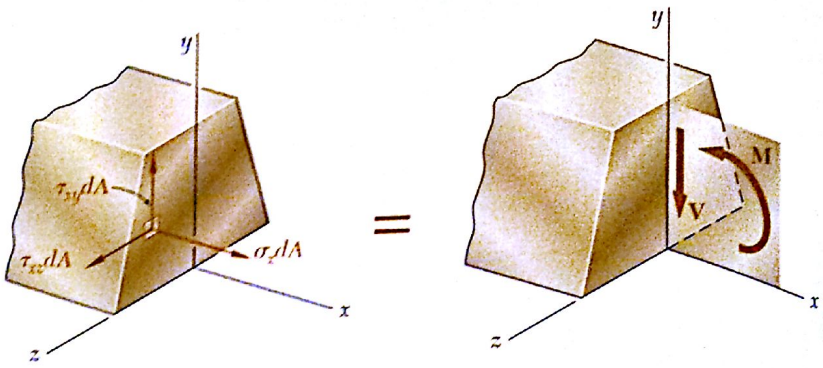


Figura 6.1

La figura 6.1 expresa gráficamente que las fuerzas elementales normales y de cortante ejercidas en una sección transversal dada de una viga prismática con un plano vertical de simetría son equivalentes al par flector **M** y a la fuerza cortante **V**. Pueden escribirse seis ecuaciones para expresar este hecho. Tres de estas ecuaciones involucran sólo a las fuerzas normales $\sigma_x dA$ y ya han sido analizadas en la sección 4.2; son las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), que expresan que la suma de las fuerzas normales es cero y que la suma de sus momentos alrededor de los ejes y y z son iguales a cero y a M, respectivamente. Ahora pueden escribirse tres ecuaciones más que involucran las fuerzas de cortante $\tau_{xy}\,dA$ y $\tau_{xz}\,dA$. Una de ellas expresa que la suma de los momentos de las fuerzas cortantes alrededor del eje x es cero y puede descartarse, por trivial, en vista de la simetría de la viga con respecto al plano xy. Las otras dos involucran las componentes y y z de las fuerzas elementales y son

$$y \text{ componentes:} \qquad \int \tau_{xy}\,dA = -V \tag{6.1}$$

$$z \text{ componentes:} \qquad \int \tau_{xz}\,dA = 0 \tag{6.2}$$

La primera de estas ecuaciones muestra que los esfuerzos cortantes verticales deben existir en cualquier sección transversal de la viga sometida a carga transversal. La segunda ecuación indica que el esfuerzo cortante medio horizontal es cero en cualquier sección. No obstante, como se verá luego, esto no significa que el esfuerzo τ_{xz} sea necesariamente cero en todas partes.

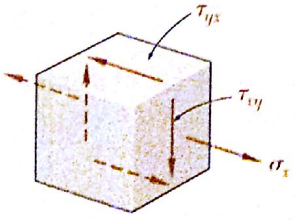


Figura 6.2

Considere ahora un pequeño elemento cúbico localizado en el plano vertical de simetría de la viga (donde se sabe que τ_{xz} debe ser nulo) y examine los esfuerzos ejercidos sobre sus caras (figura 6.2). Como se acaba de ver, sobre cada una de las caras perpendiculares al eje x se ejercen un esfuerzo

normal σ_x y uno cortante τ_{xy}. Pero se sabe que por lo estudiado en el capítulo 1, cuando se ejercen esfuerzos cortantes τ_{xy} sobre la cara vertical de un elemento, se deben ejercer esfuerzos iguales sobre las caras horizontales del mismo elemento. Se concluye así que deben existir esfuerzos cortantes longitudinales en todo elemento sometido a carga transversal. Esto puede verificarse considerando una viga en voladizo hecha de tablas separadas que se sujetan en un extremo (figura 6.3*a*). Cuando se aplica una carga transversal **P** al extremo de esta viga compuesta, se observa que las tablas resbalan unas con respecto a las otras (figura 6.3*b*). Por otra parte, si la misma viga compuesta se somete a un par de flexión **M** en su extremo libre (figura 6.3*c*), las diversas tablas se flexionarán y formarán arcos de círculos concéntricos y no resbalarán con respecto a cada una de las otras, verificando así que no ocurre esfuerzo cortante en una viga sujeta a flexión pura (véase sección 4.3).

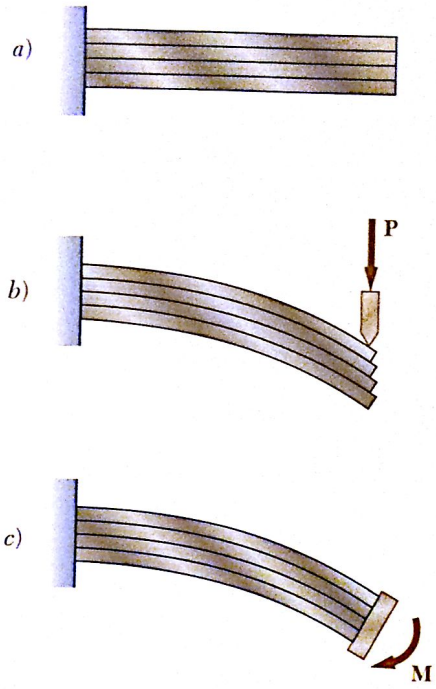


Figura 6.3

Aunque este deslizamiento no se produce realmente cuando se aplica una fuerza transversal **P** a una viga hecha de un material homogéneo y cohesivo como el acero, la tendencia al deslizamiento existe, lo cual muestra que los esfuerzos se presentan tanto en los planos longitudinales y verticales. En el caso de vigas de madera, cuya resistencia al corte es más débil entre las fibras, la falla debida al corte ocurrirá a lo largo de un plano longitudinal en lugar de en un plano transversal (figura 6.4).

En la sección 6.2, un elemento de viga de longitud Δx limitado por dos planos transversales y uno horizontal será considerado y la fuerza de corte $\Delta \mathbf{H}$ ejercida en su cara horizontal se determinará, así como el cortante por unidad de longitud, q, también conocido como *flujo cortante*. Una fórmula para el esfuerzo de cortante en una viga con un plano vertical de simetría se deducirá en la sección 6.3 y se utilizará en la sección 6.4 para determinar los esfuerzos de cortante en tipos comunes de vigas. La distribución de esfuerzos en una viga rectangular angosta se estudiará con mayor detalle en la sección 6.5.

La deducción dada en la sección 6.2 se extenderá en la sección 6.6 para cubrir el caso de un elemento de viga limitado por dos planos transversales y una superficie curva. Esto permitirá determinar, en la sección 6.7, los esfuerzos cortantes en cualquier punto de un elemento simétrico de pared delgada, como las bridas de las vigas de patín ancho y las vigas de caja. El efecto de las deformaciones plásticas sobre la magnitud y la distribución de los esfuerzos cortantes se analizará en la sección 6.8.

En la última sección del capítulo (sección 6.9), se considerará la carga asimétrica de elementos de pared delgada y se introducirá el concepto de *centro de cortante*. Se aprenderá, entonces, a determinar la distribución de esfuerzos de cortante en dichos elementos.

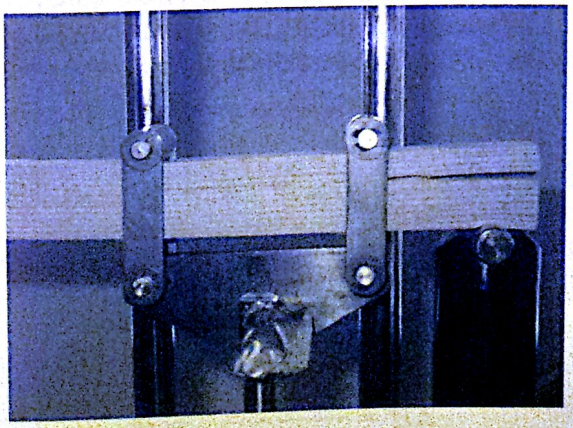


Figura 6.4

6.2 CORTANTE EN LA CARA HORIZONTAL DE UN ELEMENTO DE UNA VIGA

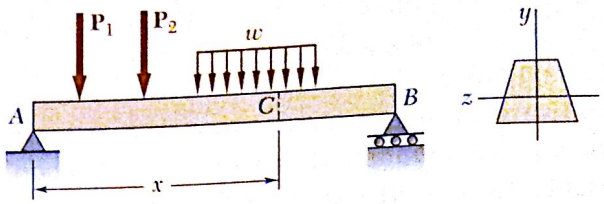


Figura 6.5

Considere una viga prismática AB con un plano vertical de simetría que soporta varias cargas concentradas y distribuidas (figura 6.5). A una distancia x del extremo A se desprende de la viga un elemento $CDD'C'$ con longitud Δx que se extiende a través del ancho de la viga desde la superficie superior de la viga hasta un plano horizontal localizado a una distancia y_1 del eje neutro (figura 6.6). Las fuerzas ejercidas sobre este elemento consisten de las

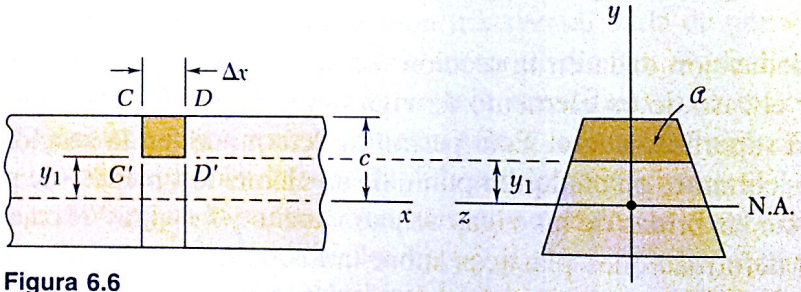


Figura 6.6

fuerzas cortantes verticales $\mathbf{V}'_C$ y $\mathbf{V}'_D$, una fuerza cortante horizontal $\Delta\mathbf{H}$ ejercida sobre la cara inferior del elemento, las fuerzas normales elementales horizontales $\sigma_C\,dA$ y $\sigma_D\,dA$ y posiblemente una carga $w\,\Delta x$ (figura 6.7). Se escribe la ecuación de equilibrio

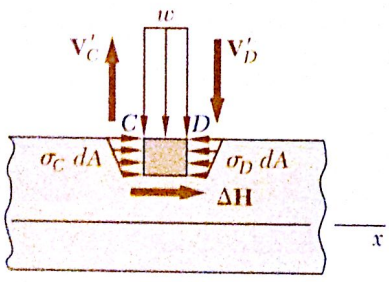


Figura 6.7

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad \Delta H + \int_a (\sigma_D - \sigma_C)\,dA = 0$$

donde la integral se extiende por el área sombreada a de la sección localizada sobre la línea $y = y_1$. Despejando ΔH de esta ecuación y utilizando la ecuación (5.2) de la sección 5.1, $\sigma = My/I$, para expresar los esfuerzos normales en términos de los momentos flectores en C y D, se tiene

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I}\int_a y\,dA \tag{6.3}$$

La integral de la ecuación (6.3) representa el *primer momento* con respecto al eje neutro de la porción $\mathcal{A}$ de la sección transversal de la viga que se localiza por encima de la línea $y = y_1$ y se denotará por Q. Por otra parte, recordando la ecuación (5.7) de la sección 5.5, se puede expresar el incremento $M_D - M_C$ del momento flector como

$$M_D - M_C = \Delta M = (dM/dx)\,\Delta x = V\,\Delta x$$

Al sustituir en la ecuación (6.3), se obtiene la siguiente expresión para el corte horizontal ejercido sobre el elemento de viga

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\Delta x \tag{6.4}$$

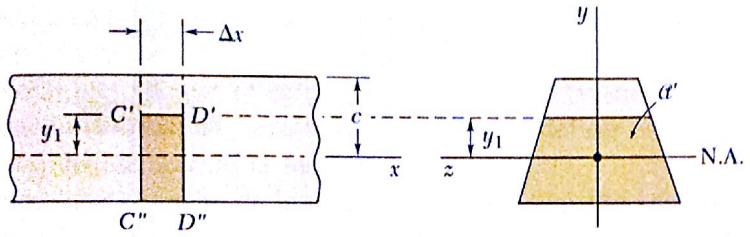


Figura 6.8

El mismo resultado se habría obtenido si se hubiera utilizado como cuerpo libre el elemento inferior $C'D'D''C''$, en lugar del elemento superior $CDD'C'$ (figura 6.8), ya que las fuerzas cortantes $\Delta\mathbf{H}$ y $\Delta\mathbf{H}'$ ejercidas por los dos elementos uno sobre el otro son iguales y opuestas. Esto nos lleva a observar que el primer momento Q de la porción $\mathcal{A}'$ de la sección transversal localizada bajo la línea $y = y_1$ (figura 6.8) es igual en magnitud y opuesto en sentido al primer momento de la porción $\mathcal{A}$ localizada por encima de dicha línea (figura 6.6). De hecho, la suma de estos momentos es igual al momento del área de toda la sección transversal con respecto a su eje centroidal y, por lo tanto, debe ser cero. Esta propiedad puede en ocasiones utilizarse para simplificar el cálculo de Q. Se advierte también que Q es máximo para $y_1 = 0$, ya que los elementos de la sección transversal localizada por encima del eje neutro contribuyen positivamente a la integral (5.5) que define a Q, mientras que los elementos localizados por debajo de dicho eje contribuyen negativamente.

El *corte horizontal por unidad de longitud*, que se denotará por la letra q, se obtiene de dividir ambos miembros de la ecuación (6.4) entre Δx:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \tag{6.5}$$

Recuerde que Q es el primer momento con respecto al eje neutro de la porción de la sección transversal localizada bien por encima o bien por debajo del punto en el que q se calcula, y que I es el momento centroidal de inercia de *toda* el área de la sección transversal. Por una razón que se aclarará más adelante (sección 6.7), el corte horizontal por unidad de longitud q también se conoce como *flujo cortante*.

EJEMPLO 6.01

Una viga está hecha de tres planchones de 20 × 100 mm de sección transversal, aseguradas con clavos (figura 6.9). Si entre los clavos hay una separación de 25 mm y la fuerza cortante en la viga es $V = 500$ N, determine la fuerza cortante en cada clavo.

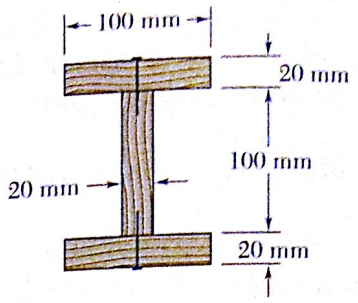


Figura 6.9

Determine primero la fuerza horizontal por unidad de longitud, q, ejercida sobre la cara inferior del planchón superior. Utilice la ecuación (6.5), donde Q representa el primer momento con respecto al eje neutro del área sombreada A de la figura 6.10*a*, y donde I es el momento de inercia con respecto al mismo eje de toda la sección transversal (figura 6.10*b*). Recordando que el primer momento de un área con respecto a un eje dado es igual al producto del área por la distancia de su centroide al eje,† se tiene

$$\begin{aligned} Q &= A\bar{y} = (0.020\text{ m} \times 0.100\text{ m})(0.060\text{ m}) \\ &= 120 \times 10^{-6}\text{ m}^3 \\ I &= \tfrac{1}{12}(0.020\text{ m})(0.100\text{ m})^3 \\ &\quad + 2[\tfrac{1}{12}(0.100\text{ m})(0.020\text{ m})^3 \\ &\quad + (0.020\text{ m} \times 0.100\text{ m})(0.060\text{ m})^2] \\ &= 1.667 \times 10^{-6} + 2(0.0667 + 7.2)10^{-6} \\ &= 16.20 \times 10^{-6}\text{ m}^4 \end{aligned}$$

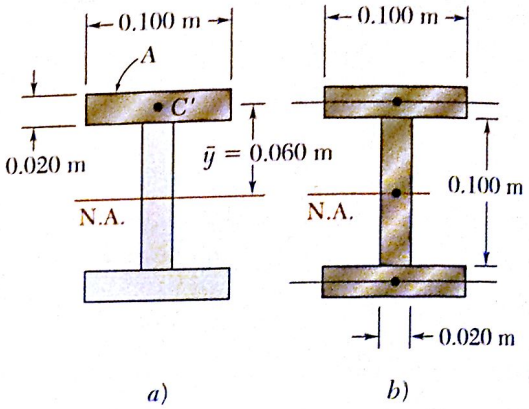


Figura 6.10

Sustituyendo en la ecuación (6.5), se escribe

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(500\text{ N})(120 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{16.20 \times 10^{-6}\text{ m}^4} = 3\,704\text{ N/m}$$

Como la separación entre los clavos es de 25 mm, la fuerza cortante en cada clavo es

$$F = (0.025\text{ m})q = (0.025\text{ m})(3\,704\text{ N/m}) = 92.6\text{ N}$$

6.3 DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS CORTANTES EN UNA VIGA

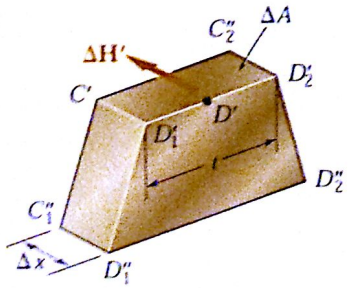


Figura 6.11

Considere de nuevo una viga con un plano vertical de simetría, sometida a varias cargas concentradas o distribuidas que se aplican sobre ese plano. Se vio en la sección precedente que, si por medio de dos cortes verticales y uno horizontal, se desprende de la viga un elemento de longitud Δx (figura 6.11), la magnitud ΔH de la fuerza cortante ejercida sobre la cara horizontal del elemento puede obtenerse de la ecuación (6.4). El *esfuerzo cortante promedio* τ_{prom} en dicha cara del elemento se obtiene dividiendo ΔH entre el área ΔA de la cara. Observando que $\Delta A = t\,\Delta x$, donde t es el espesor del elemento en el corte, se escribe

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I}\frac{\Delta x}{t\,\Delta x}$$

o

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

† Véase apéndice A.

Se nota que, como los esfuerzos cortantes τ_{xy} y τ_{yx} ejercidos respectivamente sobre un plano transversal y en un plano horizontal a través de D' son iguales, la expresión obtenida representa también el valor promedio de τ_{xy} en la línea $D'_1 D'_2$ (figura 6.12).

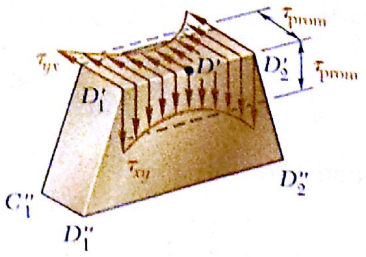


Figura 6.12

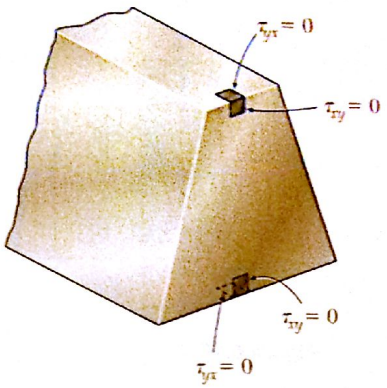


Figura 6.13

Observe que $\tau_{yx} = 0$ en las caras superior e inferior de la viga, puesto que no se ejercen fuerzas sobre estas caras. Se sigue que $\tau_{xy} = 0$ a lo largo de los bordes superior e inferior de la sección transversal (figura 6.13). También se nota que, aunque Q es máximo para $y = 0$ (véase sección 6.2), no puede concluirse que τ_{prom} será máximo a lo largo del eje neutro, ya que depende tanto del ancho t de la sección como de Q.

Siempre que el ancho de la viga permanezca pequeño comparado con la altura, el esfuerzo cortante sólo varía suavemente a lo largo de la línea $D'_1 D'_2$ (figura 6.12), y puede usarse la ecuación (6.6) para calcular τ_{xy} en cualquier punto a lo largo de $D'_1 D'_2$. En realidad τ_{xy} es mayor en los puntos D'_1 y D'_2 que en D', pero la teoría de la elasticidad muestra[†] que, para una viga de sección rectangular, de ancho b y altura h, y siempre que $b \leq h/4$, el valor del esfuerzo cortante en los puntos C_1 y C_2 (figura 6.14) no excede más del 0.8% el valor promedio del esfuerzo calculado a lo largo del eje neutro.[‡]

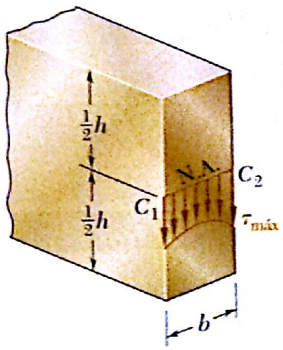


Figura 6.14

6.4 ESFUERZOS CORTANTES τ_{xy} EN TIPOS COMUNES DE VIGAS

En la sección anterior se vio que, para una *viga rectangular delgada*, es decir, para una viga de sección rectangular de ancho b y altura h con $b \leq \frac{1}{4}h$, la variación del esfuerzo cortante τ_{xy} a través del ancho de la viga es menor que el 0.8% de τ_{prom}. Puede, entonces, usarse la ecuación (6.6) en aplicaciones prácticas para determinar el esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal de una viga rectangular delgada y escribir

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} \tag{6.7}$$

donde t es igual al ancho b de la viga y Q es el primer momento del área sombreada A con respecto al eje neutro (figura 6.15).

[†] Véase S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Nueva York, 3a. ed., 1970, sec. 124.

[‡] Por otra parte, para valores grandes de b/h, el valor $\tau_{máx}$ de los esfuerzos C_1 y C_2 puede ser muchas veces mayor que el valor promedio τ_{prom} calculado a lo largo del eje neutro, como puede verse en la tabla siguiente:

b/h	0.25	0.5	1	2	4	6	10	20	50
$\tau_{máx}/\tau_{prom}$	1.008	1.033	1.126	1.396	1.988	2.582	3.770	6.740	15.65
$\tau_{máx}/\tau_{prom}$	0.996	0.983	0.940	0.856	0.805	0.800	0.800	0.800	0.800

Observando que la distancia desde el eje neutro al centroide C' de A es $\bar{y} = \frac{1}{2}(c + y)$, y recordando que, $Q = A\bar{y}$, se escribe

$$Q = A\bar{y} = b(c - y)\tfrac{1}{2}(c + y) = \tfrac{1}{2}b(c^2 - y^2) \tag{6.8}$$

Recordando, por otra parte, que $I = bh^3/12 = \frac{2}{3}bc^3$, se tiene

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3}{4}\frac{c^2 - y^2}{bc^3}V$$

o, notando que el área transversal de la viga es $A = 2bc$,

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{6.9}$$

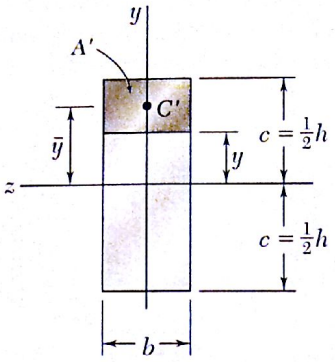


Figura 6.15

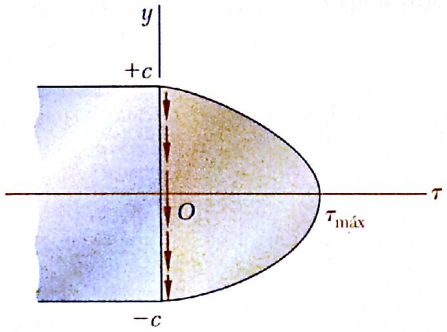


Figura 6.16

La ecuación (6.9) muestra que la distribución de esfuerzos cortantes en una sección transversal de una viga rectangular es *parabólica* (figura 6.16). Como ya se observó en la sección anterior, los esfuerzos cortantes son cero en la parte superior y en la base de la sección ($y = \pm c$). Haciendo $y = 0$ en la ecuación (6.9), se obtiene el valor del esfuerzo cortante máximo en una sección dada de una *viga rectangular delgada*.

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{6.10}$$

La relación obtenida muestra que el valor máximo del esfuerzo cortante en una viga de sección rectangular es un 50% mayor que el valor V/A que se hubiera obtenido suponiendo, erróneamente, una distribución uniforme a través de toda la sección transversal.

En el caso de una *viga estándar americana* (viga S) o una *viga de aleta ancha* (viga W), la ecuación (6.6) puede usarse para calcular el valor promedio del esfuerzo cortante τ_{xy} ejercido sobre una sección aa' o bb' de la sección transversal de la viga (figuras 6.17*a* y *b*). Se escribe

$$\tau_{prom} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

donde V es la fuerza cortante vertical, t el ancho de la sección a la elevación considerada, Q el primer momento del área sombreada con respecto al eje neutro cc' e I el momento de inercia de toda la sección transversal con respecto a cc'. Dibujando τ_{prom} contra la distancia vertical y, se obtiene la curva de la figura 6.17*c*. Se notan las discontinuidades existentes en esta curva, que reflejan la diferencia entre los valores de t correspondientes, respectivamente, a las aletas $ABGD$ y $A'B'G'D'$ y al alma $EFF'E'$.

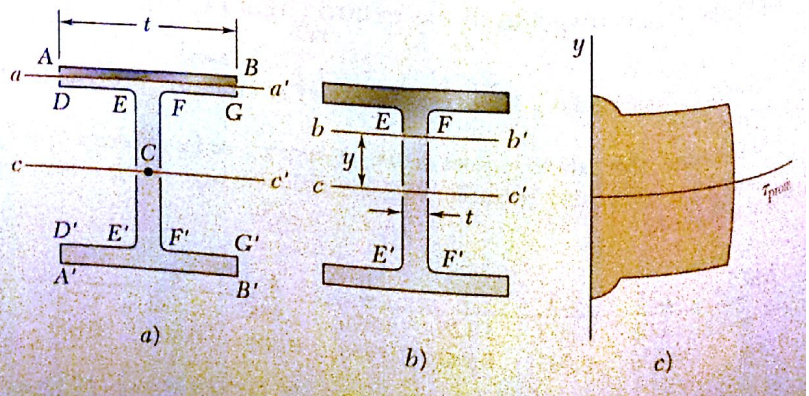


Figura 6.17

En el caso del alma, el esfuerzo cortante τ_{xy} varía sólo muy ligeramente a través del corte bb' y puede suponerse igual al promedio τ_{prom}. Esto no es cierto, sin embargo, para las aletas. Por ejemplo, considerando la línea horizontal $DEFG$ se nota que τ_{xy} es cero entre D y E y entre F y G, ya que esos segmentos son parte de la superficie libre de la viga. Por otra parte, el valor de τ_{xy} entre E y F puede obtenerse haciendo $t = EF$ en la ecuación (6.6). En la práctica generalmente se supone que toda la carga cortante la soporta el alma y que una buena aproximación del valor máximo del esfuerzo cortante en la sección se obtiene dividiendo V entre el área del alma.

$$\tau_{máx} = \frac{V}{A_{alma}} \tag{6.11}$$

No obstante, debe notarse que mientras la componente vertical τ_{xy} del esfuerzo cortante en las aletas puede despreciarse, su componente horizontal τ_{xz} tiene un valor significativo, que se determinará en la sección 6.7.

EJEMPLO 6.02

Considerando que el esfuerzo cortante permisible para la viga de madera del problema modelo 5.7 es $\tau_{perm} = 0.250$ ksi, verifique que el diseño obtenido de tal problema modelo es aceptable desde el punto de vista de los esfuerzos cortantes.

Recuerde que, del diagrama de corte del problema modelo 5.7, $V_{máx} = 4.50$ kips. El ancho real de la viga se dio como $b = 3.5$ in. y el valor obtenido para su espesor fue $h = 14.55$ in. Utilizando la ecuación (6.10) para el máximo esfuerzo cortante en una viga rectangular angosta, se escribe

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \frac{3(4.50 \text{ kips})}{2(3.5 \text{ in.})(14.55 \text{ in.})} = 0.1325 \text{ ksi}$$

Como $\tau_{máx} < \tau_{perm}$, el diseño obtenido en el problema modelo 5.7 es aceptable.

EJEMPLO 6.03

Sabiendo que el esfuerzo cortante permisible para la viga de acero del problema modelo 5.8 es $\tau_{perm} = 90$ MPa, verifique que el perfil W360 × 32.9 obtenido en dicho problema modelo es aceptable desde el punto de vista de los esfuerzos cortantes.

Se recuerda que, del diagrama de cortante del problema modelo 5.8, el máximo valor absoluto del corte en la viga es $|V|_{máx} = 58$ kN. Como se vio en la sección 6.4, puede suponerse en la práctica que toda la carga cortante la soporta por el alma y que el máximo valor del esfuerzo de corte en la viga puede obtenerse de la ecuación (6.11). Del apéndice C se encuentra que para el perfil W360 × 32.9 el espesor de la viga y el grosor de su alma son, respectivamente, $d = 349$ mm y $t_w = 5.8$ mm. Por lo tanto, se tiene

$$A_{alma} = d\,t_w = (349 \text{ mm})(5.8 \text{ mm}) = 2\,024 \text{ mm}^2$$

Sustituyendo los valores de $|V|_{máx}$ y A_{alma} en la ecuación (6.11), se obtiene

$$\tau_{máx} = \frac{|V|_{máx}}{A_{alma}} = \frac{58 \text{ kN}}{2\,024 \text{ mm}^2} = 28.7 \text{ MPa}$$

Ya que $\tau_{máx} < \tau_{perm}$, el diseño obtenido en el problema modelo 5.8 es aceptable.

*6.5 ANÁLISIS ADICIONAL SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN UNA VIGA RECTANGULAR DELGADA

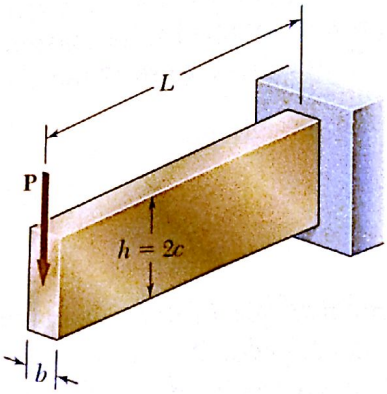


Figura 6.18

Considere una viga delgada en voladizo, de sección transversal rectangular de ancho b y altura h, sometida a una carga **P** en su extremo libre (figura 6.18). Como la fuerza cortante V en la viga es constante e igual en magnitud a **P**, la ecuación (6.9) produce

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \tag{6.12}$$

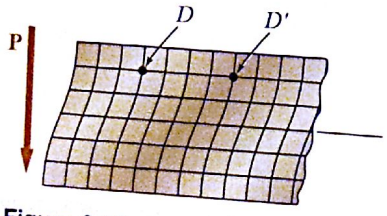


Figura 6.19

De la ecuación (6.12) se nota que los esfuerzos cortantes dependen sólo de la distancia y desde el eje neutro. Son independientes, por tanto, de la distancia desde el punto de aplicación de la carga; se sigue que todos los elementos localizados a la misma distancia de la superficie neutra sufren la misma deformación por cortante (figura 6.19). Aunque las secciones planas *no* permanezcan planas, la distancia entre dos puntos correspondientes D y D' localizados en distintas secciones, se mantiene igual. Esto indica que las deformaciones normales ϵ_x, y los esfuerzos normales σ_x no se afectan por los esfuerzos cortantes y que la hipótesis formulada en la sección 5.1 se justifica para la condición de carga de la figura 6.18.

Se concluye que el análisis de los esfuerzos en un voladizo de sección transversal rectangular, sometido a una carga **P** en su extremo libre, es válido. Los valores correctos del esfuerzo cortante en la viga están dados por la ecuación (6.12) y los esfuerzos normales a una distancia x del extremo libre se obtiene haciendo $M = -Px$ en la ecuación (5.2) de la sección 5.1. Se tiene:

$$\sigma_x = +\frac{Pxy}{I} \tag{6.13}$$

La validez de esta proposición depende, sin embargo, de las condiciones de extremo. Si la ecuación (6.12) se aplica en todas partes, entonces la carga P debe distribuirse de manera parabólica sobre la sección de extremo libre. Además, el soporte empotrado debe ser tal que permita el tipo de deformación por cortante indicado en la figura 6.19. El modelo resultante (figura 6.20) es muy difícil de encontrar en la práctica. Sin embargo, del principio de Saint-Venant se sigue que, para otros modos de aplicación de la carga y para otros tipos de soportes empotrados, las ecuaciones (6.12) y (6.13) todavía proporcionan la distribución correcta de esfuerzos, excepto cerca a los extremos de la viga.

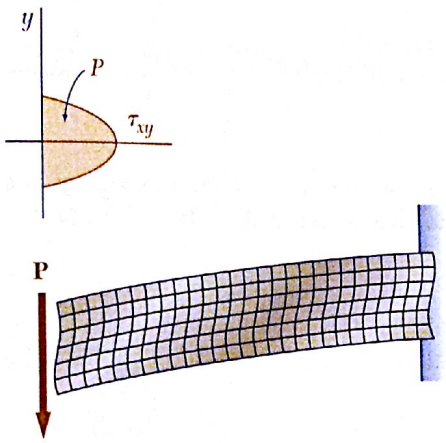


Figura 6.20

Cuando una viga de sección rectangular se somete a varias fuerzas concentradas (figura 6.21), puede usarse el principio de superposición para determinar esfuerzos normales y cortantes en secciones localizadas entre los puntos de aplicación de las cargas. Sin embargo, como las cargas $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, etcétera, se aplican en la superficie de la viga y no puede suponerse que estén distribuidas parabólicamente a través de la sección, los resultados obtenidos dejan de ser válidos en la inmediata vecindad del punto de aplicación de las cargas.

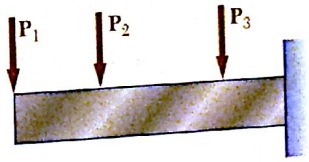


Figura 6.21

Cuando la viga se somete a una carga distribuida (figura 6.22), el cortante varía con la distancia del extremo de la viga y así lo hace el esfuerzo cortante a una elevación dada y. Las deformaciones por cortante resultantes son tales que la distancia entre dos puntos correspondientes de diferentes secciones transversales, como D_1 y D_1' o D_2 y D_2' dependerá de su elevación. Esto indica que la hipótesis de que las secciones planas permanecen planas, bajo la cual se dedujeron las ecuaciones (6.12) y (6.13), debe rechazarse para las condiciones de carga de la figura 6.22. Sin embargo, el error implícito es pequeño para los valores de la relación ancho-profundidad encontrados en la práctica.

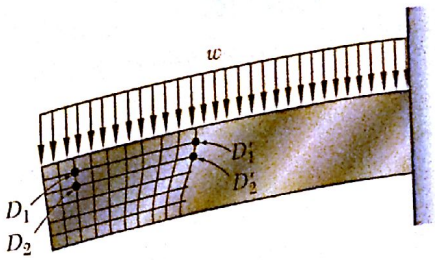
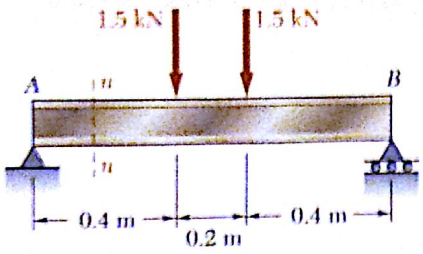


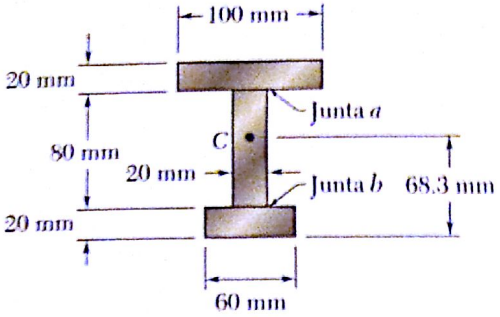
Figura 6.22

Debe notarse también que en porciones de la viga localizadas bajo una carga concentrada o distribuida, los esfuerzos normales σ_y se ejercerán sobre las caras horizontales de un elemento cúbico de material, además de los esfuerzos τ_{xy} mostrados en la figura 6.2.

PROBLEMA MODELO 6.1

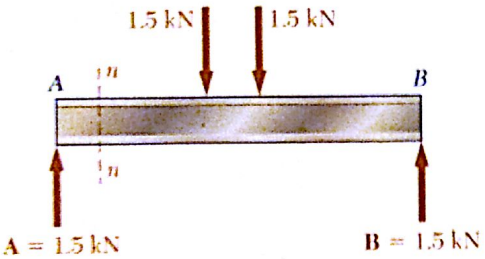
La viga AB está hecha de tres planchas pegadas y se somete, en su plano de simetría, a la carga mostrada en la figura. Considerando que el ancho de cada junta pegada es 20 mm, determine el esfuerzo cortante medio en cada junta en la sección n-n de la viga. El centroide de la sección se muestra en el dibujo y el momento centroidal de inercia es $I = 8.63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$.





SOLUCIÓN

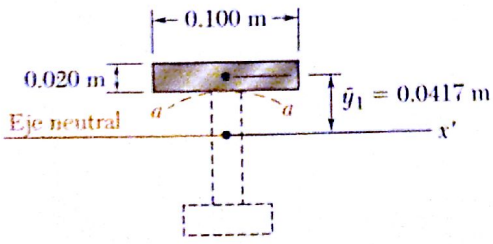
Cortante vertical de la sección n-n. Como la viga y la carga son simétricas con respecto al centro de la viga, se tiene: $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 1.5\ \text{kN} \uparrow$.



Considerando la sección de la viga a la izquierda de n-n como un cuerpo libre, se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad 1.5\ \text{kN} - V = 0 \qquad V = 1.5\ \text{kN}$$

Esfuerzos cortantes en la junta a. Se realiza un corte a-a por la junta pegada para separar la sección transversal en dos partes. Se escoge determinar Q calculando el primer momento con respecto al eje neutro del área por encima de a-a.

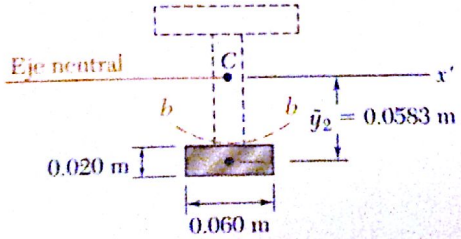


$$Q = A\bar{y}_1 = [(0.100\ \text{m})(0.020\ \text{m})](0.0417\ \text{m}) = 83.4 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Recordando que el ancho de la junta pegada es $t = 0.020$ m, se utiliza la ecuación (6.7) para hallar el esfuerzo cortante promedio de la junta.

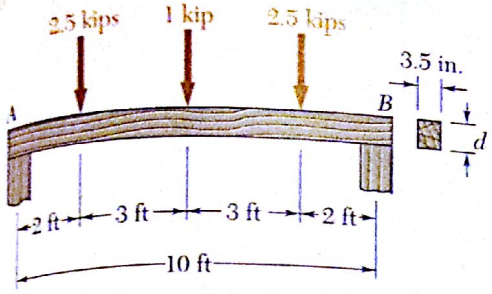
$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1\,500\ \text{N})(83.4 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)(0.020\ \text{m})} \qquad \tau_{\text{prom}} = 725\ \text{kPa}$$

Esfuerzo cortante en la junta b. Ahora se ejecuta el corte b-b y se calcula Q usando el área bajo el corte.



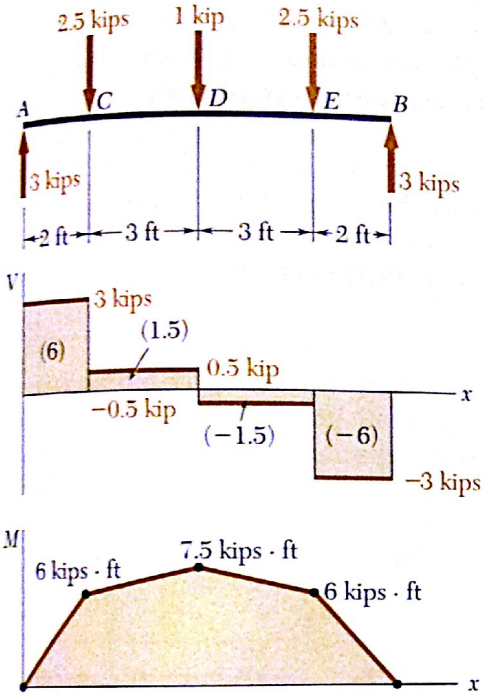
$$Q = A\bar{y}_2 = [(0.060\ \text{m})(0.020\ \text{m})](0.0583\ \text{m}) = 70.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1\,500\ \text{N})(70.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)(0.020\ \text{m})} \qquad \tau_{\text{prom}} = 608\ \text{kPa}$$



PROBLEMA MODELO 6.2

Una viga de madera AB con un claro de 10 ft y un ancho nominal de 4 in. (ancho real = 3.5 in.) debe soportar las tres cargas concentradas que se indican en la figura. Sabiendo que para el tipo de madera utilizado $\sigma_{perm} = 1\,800$ psi y $\tau_{perm} = 120$ psi, determine el espesor mínimo requerido de la viga.



SOLUCIÓN

Corte y momento flector máximos. Después de dibujar los diagramas de corte y de momento flector, se advierte que

$$M_{máx} = 7.5 \text{ kips} \cdot \text{ft} = 90 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$
$$V_{máx} = 3 \text{ kips}$$

Diseño basado en el esfuerzo normal permisible. Primero se expresa el módulo de sección elástico S en términos del espesor d. Se tiene

$$I = \frac{1}{12}bd^3 \qquad S = \frac{1}{c} = \frac{1}{6}bd^2 = \frac{1}{6}(3.5)d^2 = 0.5833d^2$$

Para $M_{máx} = 90$ kips · in. y $\sigma_{perm} = 1\,800$ psi, se escribe

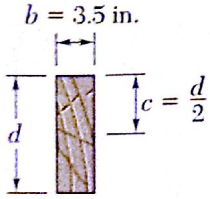
$$S = \frac{M_{máx}}{\sigma_{perm}} \qquad 0.5833d^2 = \frac{90 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{1\,800 \text{ psi}}$$
$$d^2 = 85.7 \qquad d = 9.26 \text{ in.}$$

Se ha satisfecho el requerimiento de que $\sigma_m \leq 1\,800$ psi.

Verificación del esfuerzo de corte. Para $V_{máx} = 3$ kips y $d = 9.26$ in., se encuentra

$$\tau_m = \frac{3}{2}\frac{V_{máx}}{A} = \frac{3}{2}\frac{3\,000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in.})(9.26 \text{ in.})} \qquad \tau_m = 138.8 \text{ psi}$$

Ya que $\tau_{perm} = 120$ psi, el espesor $d = 9.26$ in. *no* es aceptable y debe rediseñarse la viga con la base del requerimiento de que $\tau_m \leq 120$ psi.

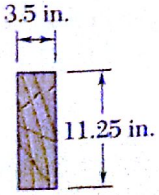


Diseño basado sobre el esfuerzo cortante permisible. Como ahora se sabe que el esfuerzo cortante permisible controla el diseño, se escribe

$$\tau_m = \tau_{perm} = \frac{3}{2}\frac{V_{máx}}{A} \qquad 120 \text{ psi} = \frac{3}{2}\frac{3\,000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in.})d}$$

$$d = 10.71 \text{ in.} \blacktriangleleft$$

El esfuerzo normal es, desde luego, menor que $\sigma_{perm} = 1\,800$ psi, y el espesor de 10.71 in. es completamente aceptable.



4 in. × 12 in.
Tamaño nominal

Comentario. Debido a que la madera se encuentra normalmente disponible en incrementos de espesor de 2 in., deberá utilizarse una viga de 4 × 12 in. de tamaño nominal. La sección transversal real será, entonces, de 3.5 × 11.25 in.

PROBLEMAS

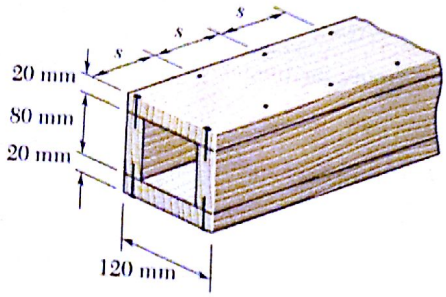


Figura P6.1 y P6.2

6.1 Una viga cuadrada tipo caja se hace con dos tablas de 20 × 80 mm y dos tablas de 20 × 120 mm, las cuales están clavadas como se muestra en la figura. Si se sabe que el espaciamiento entre los clavos es de $s = 50$ mm y que la fuerza cortante permisible en cada clavo es de 300 N, determine *a*) el máximo corte vertical permisible en la viga, *b*) el esfuerzo cortante máximo correspondiente en la viga.

6.2 Una viga cuadrada tipo caja se hace con dos tablas de 20 × 80 mm y dos tablas de 20 × 120 mm, las cuáles están clavadas como se muestra en la figura. Si se sabe que el espaciamiento entre los clavos es de $s = 30$ mm y que el corte vertical en la viga es $V = 1200$ N, determine *a*) la fuerza cortante en cada clavo, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga.

6.3 Tres tablas, cada una de 2 in. de espesor, se clavan para formar una viga sometida a un cortante vertical. Si la fuerza cortante permisible en cada clavo es de 150 lb, determine el cortante permisible si el espaciamiento s entre los clavos es de 3 in.

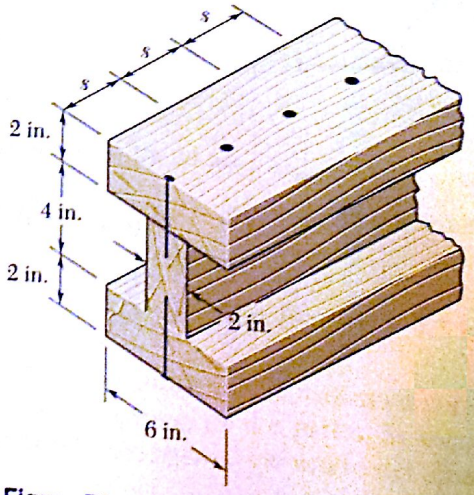


Figura P6.3 y *P6.4*

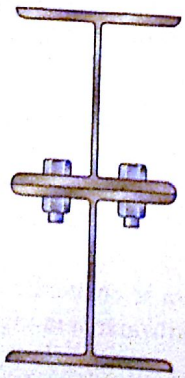


Figura P6.5

6.4 Tres tablas, cada una de 2 in. de espesor, se clavan para formar una viga sometida a un cortante vertical de 300 lb. Si se sabe que la fuerza cortante permisible en cada clavo es de 100 lb, determine el máximo espaciamiento longitudinal s que puede usarse entre los clavos.

6.5 La viga compuesta que se muestra en la figura se fabricó al conectar dos elementos de acero laminado W6 × 20, usando pernos de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro espaciados en forma longitudinal cada 6 in. Si se sabe que el esfuerzo cortante promedio permisible en los pernos es de 10.5 ksi, determine el máximo esfuerzo vertical permisible en la viga.

6.6 La viga mostrada en la figura se fabrica al conectar dos perfiles de canal, usando pernos de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro espaciados en forma longitudinal cada 7.5 in. Determine el esfuerzo cortante promedio sobre los pernos causado por una fuerza cortante de 25 kips paralela al eje y.

6.7 La viga de acero laminado estándar americano que se muestra en la figura se ha reforzado al añadirle dos placas de 16 × 200 mm, utilizando pernos de 18 mm de diámetro espaciados en forma longitudinal cada 120 mm. Si se sabe que el esfuerzo cortante promedio permisible en los pernos es de 90 MPa, determine la máxima fuerza cortante vertical permisible.

6.8 Retome el problema 6.7, y ahora suponga que las placas de refuerzo sólo tienen 12 mm de espesor.

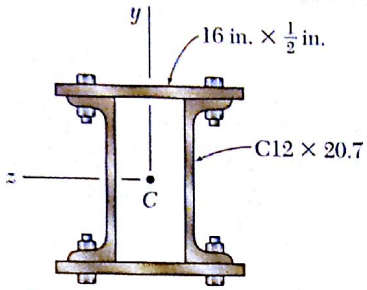


Figura *P6.6*

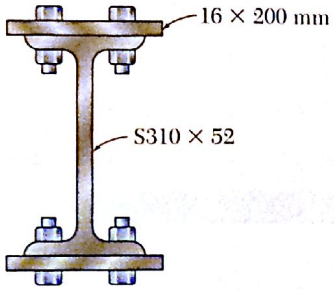
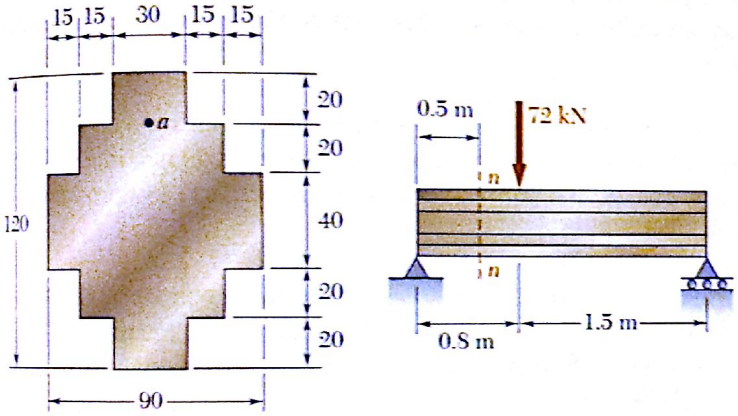


Figura P6.7

6.9 a 6.12 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, considere la sección n-n y determine *a*) el máximo esfuerzo cortante en dicha sección, *b*) el esfuerzo cortante en el punto a.



Dimensiones en mm

Figura P6.9

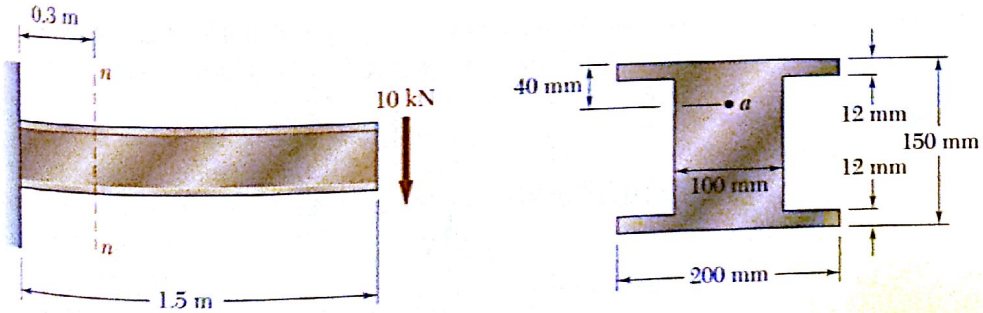


Figura *P6.10*

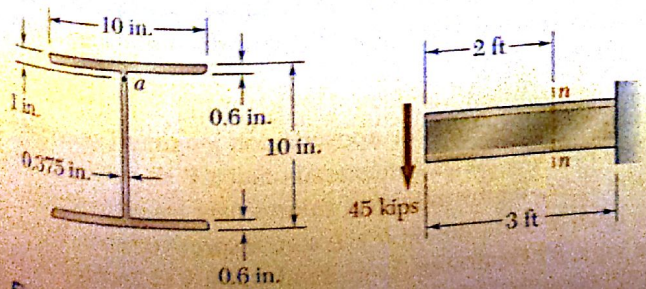


Figura P6.11

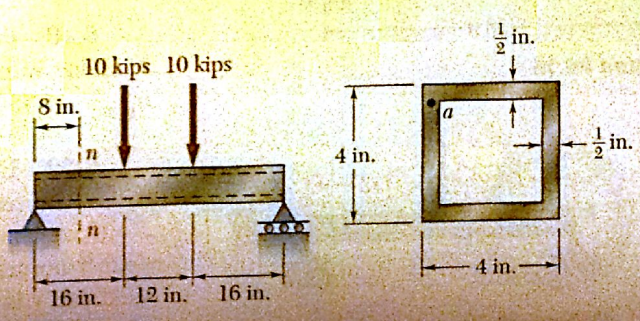


Figura P6.12

6.13 Dos placas de acero con sección transversal rectangular de 12 × 220 mm se sueldan a una viga W250 × 58, como se muestra en la figura. Determine el cortante vertical máximo permisible si el esfuerzo cortante en la viga no debe exceder 90 MPa.

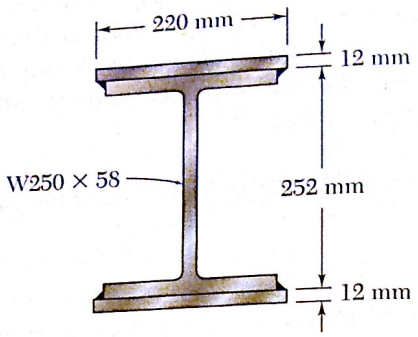


Figura P6.13

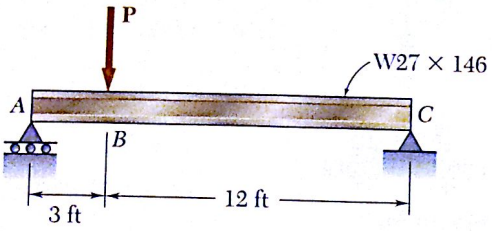


Figura P6.15

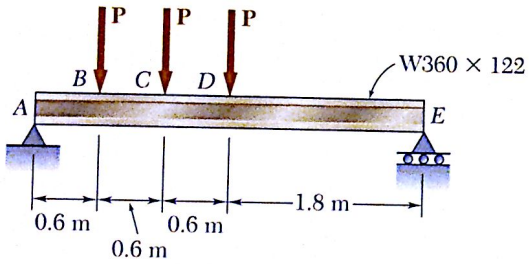


Figura P6.16

6.14 Retome el problema 6.13, y ahora suponga que las dos placas de acero *a*) se reemplazan con placas de acero de 8 × 220 mm de sección transversal rectangular, *b*) se eliminan.

6.15 Para la viga de patín ancho que soporta la carga mostrada en la figura, determine la máxima carga **P** que puede aplicarse. Considere que el máximo esfuerzo normal es de 24 ksi y que el máximo esfuerzo cortante usando la aproximación $\tau_m = V/A_{\text{alma}}$ es de 14.5 ksi.

6.16 Para la viga de patín ancho que soporta la carga mostrada en la figura, determine la máxima carga **P** que puede aplicarse. Considere que el máximo esfuerzo normal es de 160 MPa y que el máximo esfuerzo cortante usando la aproximación $\tau_m = V/A_{\text{alma}}$ es de 100 MPa.

6.17 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine la anchura mínima requerida b, si se sabe que para el grado de madera utilizado, σ_{perm} = 12 MPa y τ_{perm} = 825 kPa.

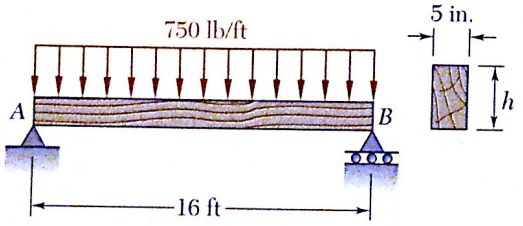


Figura P6.18

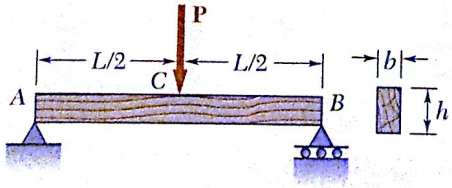


Figura P6.19

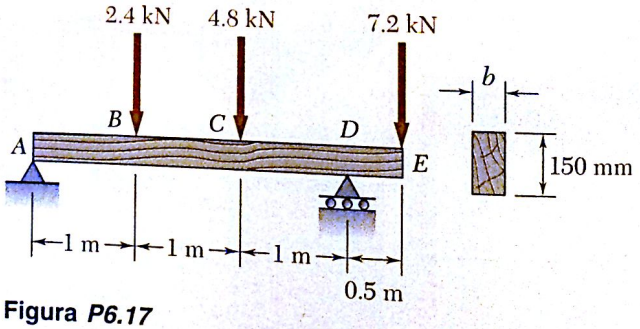


Figura *P6.17*

6.18 Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la profundidad mínima requerida h, si se sabe que para el grado de madera utilizado, σ_{perm} = 1 750 psi y τ_{perm} = 130 psi.

6.19 Una viga de madera AB simplemente apoyada con longitud L y sección transversal rectangular se somete a una carga concentrada única **P** en su punto medio C. *a*) Muestre que la razón τ_m/σ_m de los máximos valores para los esfuerzos cortante y normal en la viga es igual a $2h/L$, donde h y L son, respectivamente, la profundidad y la longitud de la viga. *b*) Determine la profundidad h y el ancho b de la viga, si L = 2 m, P = 40 kN, τ_m = 960 kPa y σ_m = 12 MPa.

6.20 Una viga de madera AB de longitud L y sección transversal rectangular soporta una carga uniformemente distribuida w y se apoya como se muestra en la figura. *a)* Muestre que la relación τ_m/σ_m de los máximos valores para los esfuerzos cortante y normal en la viga es igual a $2h/L$, donde h y L son, respectivamente, la profundidad y la longitud de la viga. *b)* Determine la profundidad h y el ancho b de la viga, si se sabe que $L = 5$ m, $w = 8$ kN/m, $\tau_m = 1.08$ MPa y $\sigma_m = 12$ MPa.

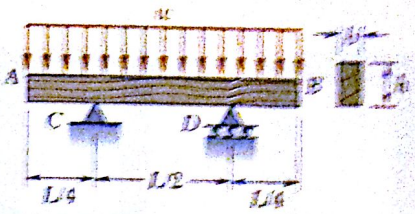
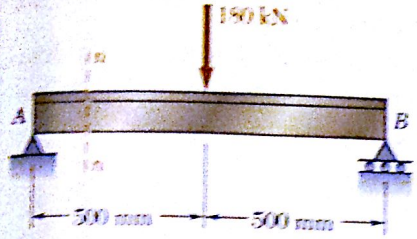


Figura P6.20

6.21 y 6.22 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, considere la sección n-n y determine el esfuerzo cortante en *a)* el punto a, *b)* el punto b.



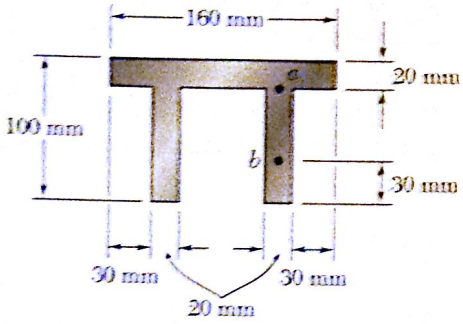
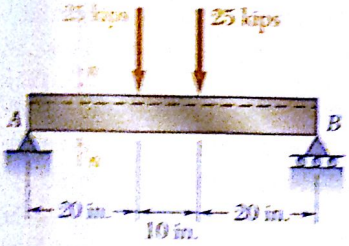


Figura P6.21 y P6.23



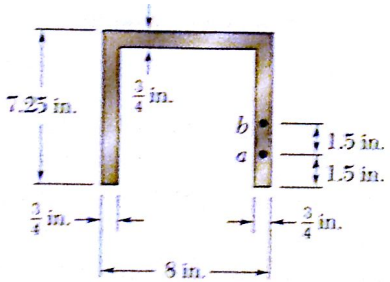


Figura P6.22 y P6.24

6.23 y 6.24 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, determine el esfuerzo cortante máximo en la sección n-n.

6.25 a 6.28 Una viga con la sección transversal que se muestra en la figura se sujeta a un cortante vertical **V**. Determine *a)* la línea horizontal a lo largo de la cual el esfuerzo cortante es máximo, *b)* la constante k en la siguiente expresión para el esfuerzo cortante máximo

$$\tau_{máx} = k\frac{V}{A}$$

donde A es el área de la sección transversal de la viga.

Figura P6.25

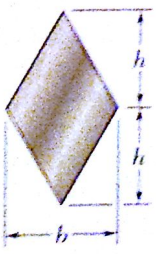
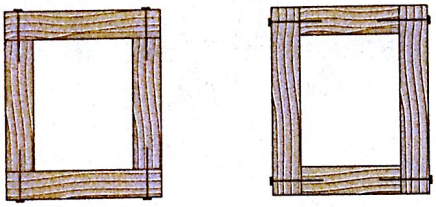


Figura P6.26

Figura P6.27

Figura P6.28

6.6 CORTE LONGITUDINAL EN UN ELEMENTO DE VIGA CON FORMA ARBITRARIA



a) *b)*

Figura 6.23

Considere una viga de caja obtenida clavando cuatro tablas, como se observa en la figura 6.23*a*. Se aprendió en la sección 6.2 cómo determinar el corte por unidad de longitud, q, sobre las superficies horizontales a lo largo de las cuales se unen las tablas. Pero, ¿podría determinarse q si las tablas hubieran sido unidas a lo largo de superficies *verticales*, como se muestra en la figura 6.23*b*? Se examinó en la sección 6.4 la distribución de las componentes verticales τ_{xy} de los esfuerzos sobre la sección transversal de una viga W o S y se encontró que estos esfuerzos tienen un valor casi constante en el alma de la viga y son despreciables en los patines. Pero, ¿qué hay de las componentes *horizontales* τ_{xz} de los esfuerzos en los patines?

Para responder estas preguntas debe extenderse el procedimiento desarrollado en la sección 6.2 para la determinación del corte por unidad de longitud, q, de tal manera que se aplique a los casos recién descritos.

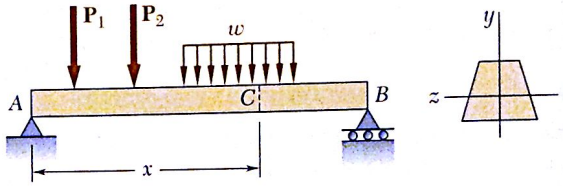


Figura 6.5 (repetida)

Considere la viga prismática AB de la figura 6.5, que tiene un plano vertical de simetría y soporta las cargas que se muestran. A una distancia x desde el extremo A se desprende nuevamente un elemento $CDD'C'$ con longitud Δx. Este elemento, sin embargo, se extiende ahora desde dos lados de la viga a una superficie curva arbitraria (figura 6.24). Las fuerzas ejercidas sobre el elemento incluyen fuerzas cortantes verticales $\mathbf{V}'_C$ y $\mathbf{V}'_D$, fuerzas normales horizontales elementales $\sigma_C\, dA$ y $\sigma_D\, dA$, posiblemente una carga $w\,\Delta x$ y una fuerza longitudinal de corte $\Delta\mathbf{H}$ que representa la resultante de las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la superficie curva (figura 6.25). Se escribe la ecuación de equilibrio

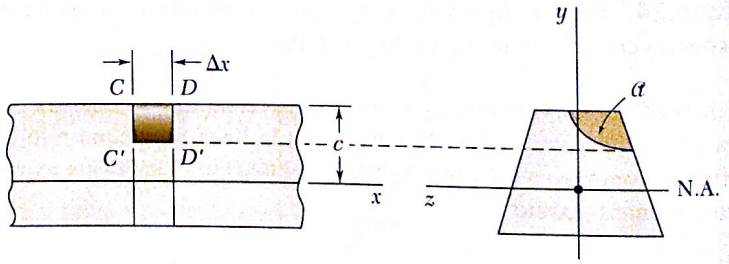


Figura 6.24

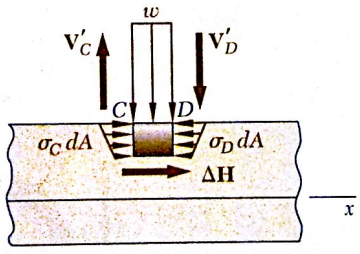


Figura 6.25

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad \Delta H + \int_{\mathcal{A}} (\sigma_D - \sigma_C)\, dA = 0$$

donde la integral se calculará a lo largo del área sombreada $\mathcal{A}$ de la sección. Se observa que la ecuación resultante es la misma que se obtuvo en la sec-

ción 6.2, pero que el área sombreada $\mathcal{A}$ sobre la que se calcula la integral ahora se extiende hasta la superficie sombreada.

El resto de la deducción es el mismo que en la sección 6.2. Se encuentra que el corte longitudinal ejercido sobre el elemento de viga es

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\Delta x \tag{6.4}$$

donde I es el momento centroidal de inercia de toda la sección, Q el primer momento del área sombreada $\mathcal{A}$ con respecto al eje neutro y V el corte vertical en la sección. Dividiendo ambos miembros de la ecuación (6.4) entre Δx, se obtiene el corte horizontal por unidad de longitud, o flujo cortante:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \tag{6.5}$$

EJEMPLO 6.04

Una viga-cajón cuadrada está hecha de dos tablas de 0.75 × 3 in., y dos de 0.75 × 4.5 in., clavadas como se muestra (figura 6.26). Si la separación entre los clavos es de 1.75 in. y la viga se somete a un cortante vertical de magnitud $V = 600$ lb, determine la fuerza cortante en cada clavo.

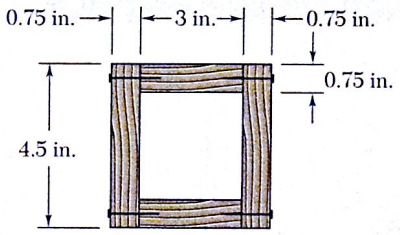


Figura 6.26

Se aísla la tabla superior y se considera la fuerza total por unidad de longitud q, ejercida sobre sus dos extremos. Si usamos la ecuación (6.5), donde Q es el primer momento con respecto al eje neutro del área sombreada A' de la figura 6.27*a*, y donde I es el momento de inercia con respecto al mismo eje de la sección transversal total de la viga-cajón (figura 6.27*b*). Se tiene

$$Q = A'\bar{y} = (0.75 \text{ in.})(3 \text{ in.})(1.875 \text{ in.}) = 4.22 \text{ in.}^3$$

Recordando que el momento de inercia de un cuadrado de lado a con respecto al eje centroidal es $I = \frac{1}{12}a^4$, se escribe

$$I = \tfrac{1}{12}(4.5 \text{ in.})^4 - \tfrac{1}{12}(3 \text{ in.})^4 = 27.42 \text{ in.}^4$$

Sustituyendo en la ecuación (6.5),

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(600 \text{ lb})(4.22 \text{ in.}^3)}{27.42 \text{ in.}^4} = 92.3 \text{ lb/in.}$$

Puesto que tanto la viga como la tabla superior son simétricas con respecto al plano vertical de carga, se ejercen fuerzas iguales sobre los dos bordes de la tabla. La fuerza por unidad de longitud en estos bordes es $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}(92.3) = 46.15$ lb/in. Como la separación entre clavos es de 1.75 in., la fuerza cortante en cada clavo es

$$F = (1.75 \text{ in.})(46.15 \text{ lb/in.}) = 80.8 \text{ lb}$$

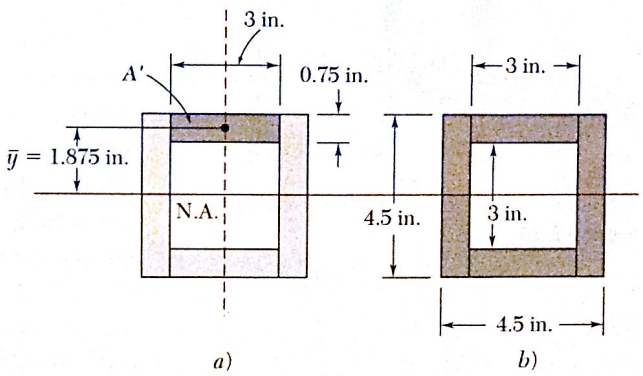


Figura 6.27

6.7 ESFUERZOS CORTANTES EN ELEMENTOS DE PARED DELGADA

En la sección precedente se vio que la ecuación (6.4) puede utilizarse para determinar el corte longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ ejercido sobre las paredes de un elemento de viga de forma arbitraria y que la ecuación (6.5) puede emplearse para determinar el flujo cortante q correspondiente. Estas ecuaciones se utilizarán en esta sección para calcular tanto el flujo cortante como el esfuerzo cortante promedio en elementos de pared delgada como los patines de vigas de patín ancho (figura 6.28) y de vigas de caja, o en las paredes de tubos estructurales (figura 6.29).

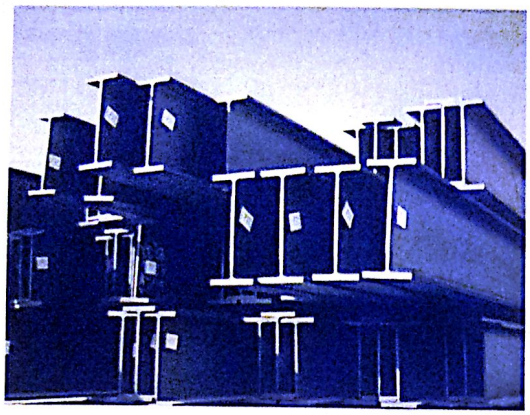


Figura 6.28

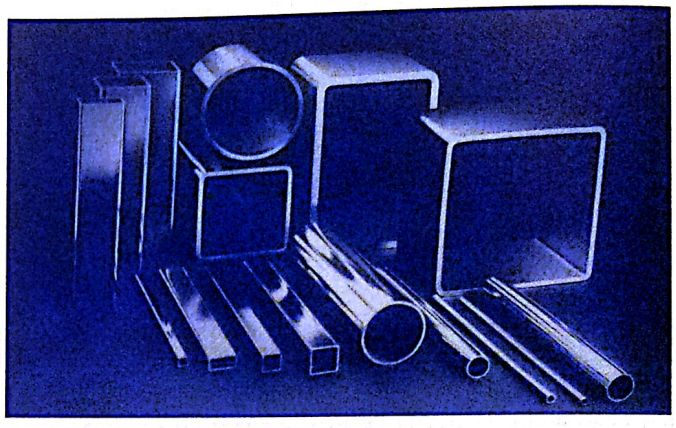


Figura 6.29

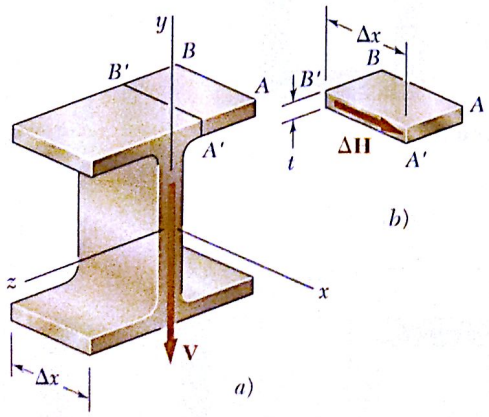


Figura 6.30

Considere, por ejemplo, un segmento con longitud Δx de una viga de patín ancho (figura 6.30*a*) y sea **V** el corte vertical en la sección transversal mostrada. Se desprende un elemento $ABB'A'$ del patín superior (figura 6.30*b*). El corte longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ ejercido sobre el elemento puede obtenerse de la ecuación (6.4):

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\,\Delta x \tag{6.4}$$

Dividiendo ΔH entre el área $\Delta A = t\,\Delta x$ del corte, se obtiene, para el esfuerzo cortante promedio ejercido sobre el elemento, la misma expresión que se obtuvo en la sección 6.3 en caso de un corte horizontal:

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

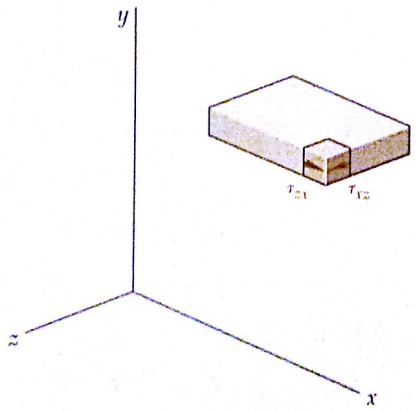


Figura 6.31

Debe notarse, sin embargo, que τ_{prom} representa ahora el valor promedio del esfuerzo cortante τ_{zx} ejercido sobre el corte vertical. Pero como el espesor t de la aleta es pequeño, hay muy poca variación, de τ_{zx} a través del corte. Así, recordando que $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ (figura 6.31), se concluye que la componente horizontal τ_{xz} del esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección transversal de la aleta puede obtenerse mediante la ecuación (6.6), donde Q es el primer momento del área sombreada con respecto al eje neutro (figura 6.32*a*). Recuerde que se obtuvo un resultado similar en la sección 6.4 para la componente vertical τ_{xy} del esfuerzo cortante en el alma (figura 6.32*b*). La ecuación

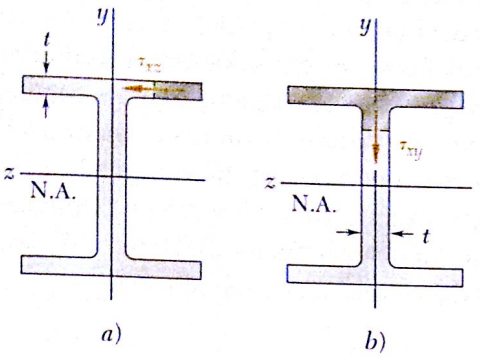


Figura 6.32

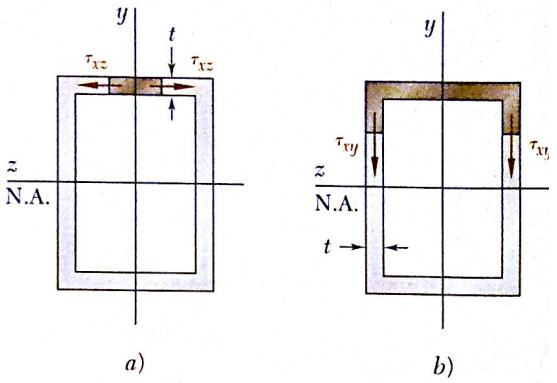


Figura 6.33

(6.6) puede usarse para determinar los esfuerzos cortantes en otros elementos de pared delgada, como viga-cajón (figura 6.33) y medias tuberías (figura 6.34), siempre que las cargas se apliquen en un plano de simetría del elemento. En cada caso, el corte debe ser perpendicular a la superficie del elemento y la ecuación (6.6) dará la componente del esfuerzo cortante en la dirección de la tangente a esa superficie. (La otra componente puede suponerse igual a cero, dada la proximidad de las dos superficies libres.)

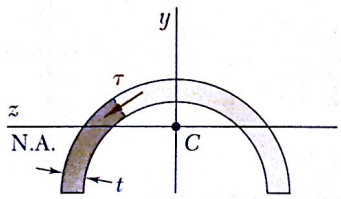


Figura 6.34

Comparando las ecuaciones (6.5) y (6.6), se nota que el producto del esfuerzo cortante τ en un punto dado de la sección y del espesor t de la sección en ese punto es igual a q. Como V e I son constantes en una sección dada, q depende sólo del primer momento Q y por tanto puede esquematizarse fácilmente en la sección. En el caso de la viga-cajón, por ejemplo (figura 6.35), se nota que q aumenta paulatinamente de cero en A hasta un valor máximo en C y C' en el eje neutro y luego decrece hasta cero al alcanzar E. También se nota que no hay variación repentina de q cuando se pasa una esquina en B, D, B' o D' y que el sentido de q en las partes horizontales de la sección puede obtenerse fácilmente a partir del sentido en las porciones verticales (que es el mismo de **V**). En el caso de una sección de aleta ancha (figura 6.36), los valores de q en las porciones AB y $A'B$ de la aleta superior se distribuyen simétricamente. Cuando se llega a B en el alma, los valores de q correspondientes a las dos mitades de la aleta deben combinarse para obtener el valor de q en el tope del alma. Después de alcanzar un valor máximo en C, en el eje neutro, q decrece y en D se separa en dos partes iguales correspondientes a las dos mitades de la aleta inferior. El nombre de *flujo de cortante*, comúnmente utilizado para referirse a cortante por unidad de longitud q, refleja la semejanza entre las propiedades de q que se han descrito y algunas de las características del flujo de fluido en el canal abierto o en una tubería de presión.[†]

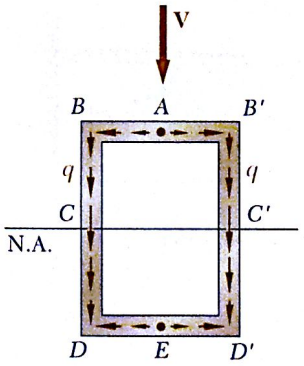


Figura 6.35 Variación de q en una viga-cajón.

Hasta ahora se ha supuesto que todas las cargas actuaban en un plano de simetría del elemento. En el caso de elementos con dos planos de simetría, como la viga de aleta ancha de la figura 6.32 o la viga-cajón de la figura

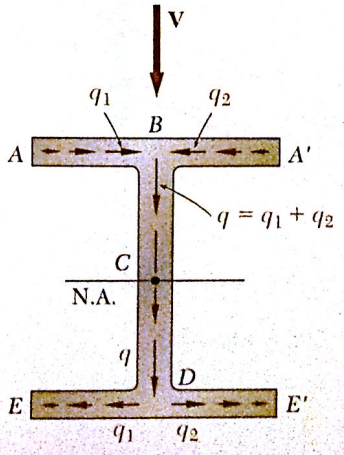


Figura 6.36 Variación de q en una viga de ala ancha.

[†] Recuerde que el concepto de flujo cortante se usó para analizar la distribución de esfuerzos-cortantes en ejes huecos de pared delgada (véase sección 3.13). Sin embargo, mientras el flujo de cortante en un eje hueco es constante, en un elemento bajo carga transversal no lo es.

6.33, cualquier carga aplicada a través del centroide de una sección transversal puede descomponerse en componentes a lo largo de los ejes de simetría de la sección. Cada componente provocará que el elemento se flexione en un plano de simetría; los esfuerzos cortantes correspondientes se obtienen mediante la ecuación (6.6). El principio de la superposición puede usarse para hallar los esfuerzos resultantes.

Sin embargo, si el elemento considerado carece de un plano de simetría o si posee uno solo y se le somete a una carga no contenida en ese plano, se observa que el elemento se *flexiona y tuerce* al mismo tiempo, excepto cuando la carga se aplica en un punto específico llamado *centro de cortante*. Observe que el centro de cortante generalmente no coincide con el centroide de la sección transversal. La determinación del centro de cortante para varias figuras de pared delgada se verá en la sección 6.9.

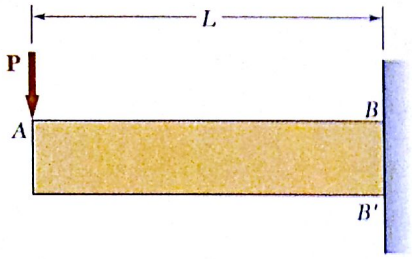


Figura 6.37 ($PL \leq M_Y$)

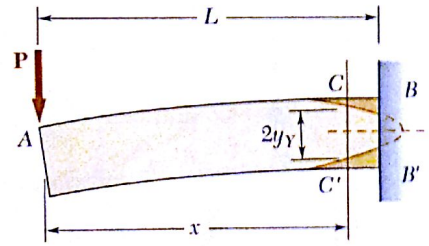


Figura 6.38 ($PL > M_Y$)

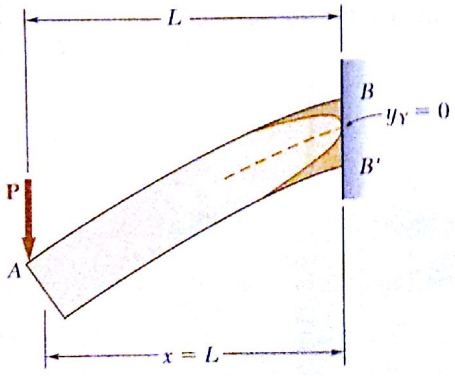


Figura 6.39 ($PL = M_P = \frac{3}{2}M_Y$)

*6.8 DEFORMACIONES PLÁSTICAS

Considere una viga en voladizo AB, de longitud L y con sección transversal rectangular, sometida en su extremo libre A a una carga concentrada **P** (figura 6.37). El valor máximo del momento flector ocurre en el extremo fijo B y es igual a $M = PL$. Mientras este valor no exceda el máximo momento elástico M_Y, es decir, siempre que $PL \leq M_Y$, el esfuerzo normal σ_x no excederá el límite de fluencia σ_Y en ninguna parte de la viga. Sin embargo, cuando P se incrementa más allá del valor M_Y/L, la fluencia se inicia en los puntos B y B' y se extiende al extremo libre de la viga. Suponiendo que el material es elastoplástico y considerando una sección CC' localizada a una distancia x del extremo libre A de la viga (figura 6.38), se obtiene el semiespesor y_Y del núcleo elástico en esa sección haciendo $M = Px$ en la ecuación (4.38) de la sección 4.9. Se tiene

$$Px = \frac{3}{2}M_Y\left(1 - \frac{1}{3}\frac{y_Y^2}{c^2}\right) \tag{6.14}$$

donde c es la mitad de la altura de la viga. Graficando y_Y contra x, se obtiene la frontera entre las zonas elástica y plástica.

Mientras $PL < \frac{3}{2}M_Y$, la parábola definida por la ecuación (6.14) interseca la línea BB', como se muestra en la figura 6.38. Sin embargo, cuando PL alcanza el valor $\frac{3}{2}M_Y$, es decir, cuando $PL = M_p$, en donde M_p es el momento plástico de la sección 4.9, la ecuación (6.14) da $y_Y = 0$ para $x = L$, lo cual muestra que el vértice de la parábola está ahora en la sección BB' y que la sección se ha vuelto completamente plástica (figura 6.39). Recordando la ecuación (4.40) de la sección 4.9 se observa también que el radio de curvatura ρ de la superficie neutra en ese punto es igual a cero, indicando la presencia de una fuerte flexión de la viga en su extremo fijo. Se dice que se ha desarrollado una *articulación plástica* en ese punto. La carga $P = M_p/L$ es la más grande que la viga puede soportar.

Todo el planteamiento anterior se basó únicamente en el análisis de los esfuerzos normales en la viga. Se examinará ahora la distribución de esfuerzos cortantes en una sección que se ha vuelto parcialmente plástica. Considere la parte de viga $CC''D''D$ localizada entre las secciones transversales CC' y DD', y situada sobre el plano horizontal $D''C''$ (figura 6.40*a*). Si esta porción está enteramente en la zona plástica, los esfuerzos normales ejercidos sobre las caras CC'' y DD'' estarán distribuidos de manera uniforme y serán iguales al límite de fluencia σ_Y (figura 6.40*b*). El equilibrio del cuerpo libre

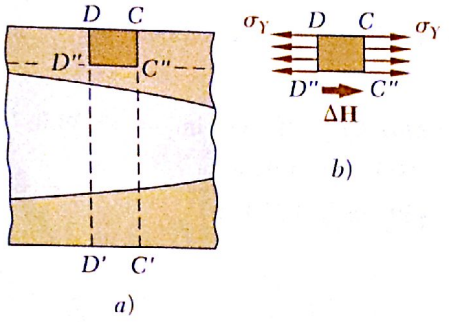


Figura 6.40

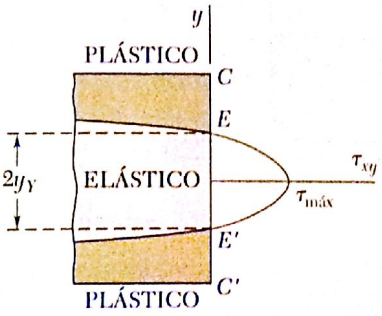


Figura 6.41

$CC''D''D$ requiere que la fuerza cortante horizontal $\Delta\mathbf{H}$ ejercida sobre la cara de abajo sea igual a cero. Se sigue que el valor promedio del esfuerzo cortante horizontal τ_{yx} a través de la viga en C'' es cero, al igual que el valor promedio del esfuerzo cortante vertical τ_{xy}. Se concluye así que el cortante vertical $V = P$ en la sección CC' debe destruirse enteramente sobre la porción EE' de esa sección que está localizada dentro de la zona elástica (figura 6.41). Puede mostrarse[†] que la distribución de esfuerzos cortantes sobre EE' es la misma que la de una viga rectangular elástica del mismo ancho b de la viga AB y de profundidad igual al espesor $2y_Y$ de la zona elástica. Llamando A' al área $2by_Y$ de la porción elástica de la sección transversal, se tiene:

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{P}{A'}\left(1 - \frac{y^2}{y_Y^2}\right) \tag{6.15}$$

El máximo valor del esfuerzo cortante ocurre para $y = 0$ y es

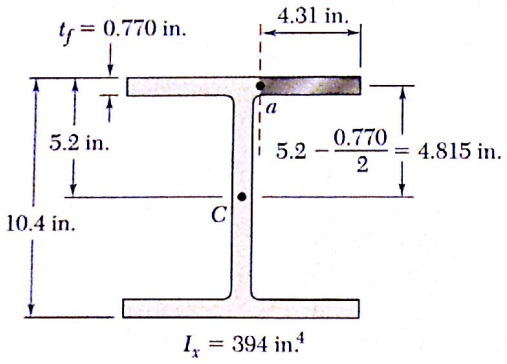
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{P}{A'} \tag{6.16}$$

A medida que el área A' de la porción elástica de la sección decrece, $\tau_{\text{máx}}$ aumenta hasta alcanzar el límite de fluencia a cortante τ_Y. Así, el cortante contribuye a la falla última de la viga. Un análisis más exacto de este modo de falla debe tener en cuenta el efecto combinado de los esfuerzos normales y cortantes.

[†] Véase problema 6.60.

PROBLEMA MODELO 6.3

Sabiendo que el cortante vertical es de 50 kips en una sección laminada de acero W10 × 68, determine el esfuerzo cortante horizontal en la aleta superior en un punto a localizado a 4.31 in. del borde de la viga. Las dimensiones y otros datos geométricos de la sección se dan en el apéndice C.



SOLUCIÓN

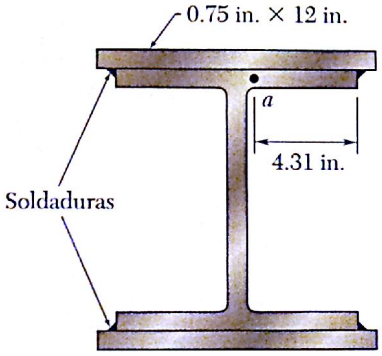
Se ha aislado la parte sombreada de la aleta cortando por la línea punteada que pasa por el punto a.

$$Q = (4.31 \text{ in.})(0.770 \text{ in.})(4.815 \text{ in.}) = 15.98 \text{ in.}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(50 \text{ kips})(15.98 \text{ in.}^3)}{(394 \text{ in.}^4)(0.770 \text{ in.})} \qquad \tau = 2.63 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA MODELO 6.4

Resuelva el problema modelo 6.3 suponiendo que se han soldado platinas de 0.75 × 12 in. a las aletas de la viga W10 × 68 por medio de soldaduras de filete continuas, como se muestra en la figura.

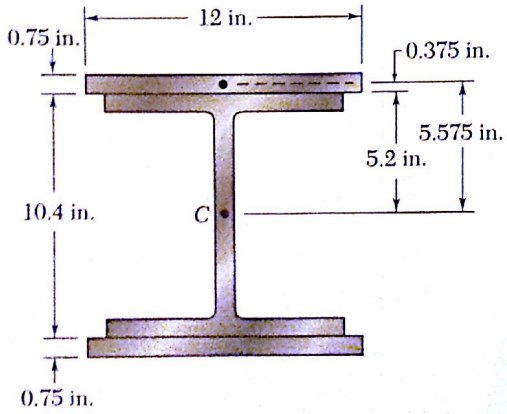


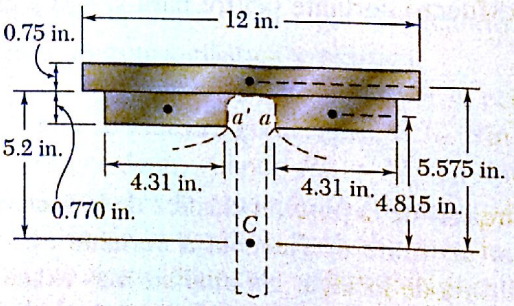
SOLUCIÓN

Para la viga compuesta el momento centroidal de inercia es:

$$I = 394 \text{ in.}^4 + 2[\tfrac{1}{12}(12 \text{ in.})(0.75 \text{ in.})^3 + (12 \text{ in.})(0.75 \text{ in.})(5.575 \text{ in.})^2]$$
$$I = 954 \text{ in.}^4$$

Como la platina superior y la aleta están conectadas sólo en las soldaduras de filete, puede encontrarse el esfuerzo cortante en a haciendo un corte en la aleta en el punto a, *entre* la platina y la aleta, y de nuevo en la aleta en el punto simétrico a'.

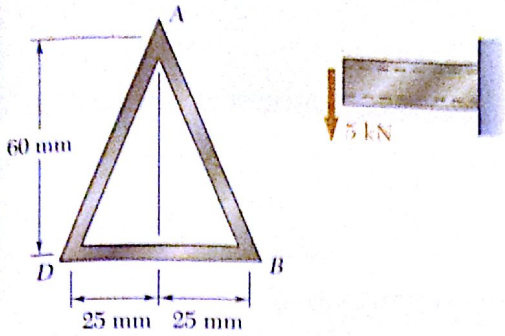




Para el área sombreada que se ha aislado, se tiene

$$t = 2t_f = 2(0.770 \text{ in.}) = 1.540 \text{ in.}$$
$$Q = 2[(4.31 \text{ in.})(0.770 \text{ in.})(4.815 \text{ in.})] + (12 \text{ in.})(0.75 \text{ in.})(5.575 \text{ in.})$$
$$Q = 82.1 \text{ in.}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(50 \text{ kips})(82.1 \text{ in.}^3)}{(954 \text{ in.}^4)(1.540 \text{ in.})} \qquad \tau = 2.79 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

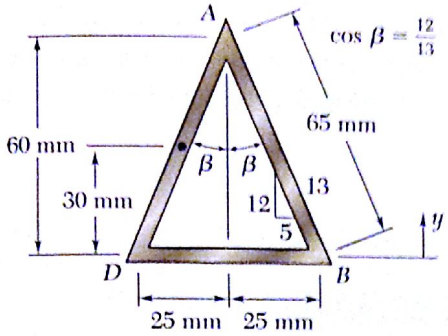


PROBLEMA MODELO 6.5

La viga de pared delgada que se muestra en la figura, obtenida por extrusión, es de aluminio y tiene un espesor uniforme de 3 mm. Considerando que la fuerza cortante es 5 kN, determine: *a*) el esfuerzo cortante en el punto *A*, *b*) el máximo esfuerzo cortante en la viga.

Nota: Las dimensiones dadas van hasta las líneas localizadas en la mitad de las superficies externas e internas de la viga.

SOLUCIÓN

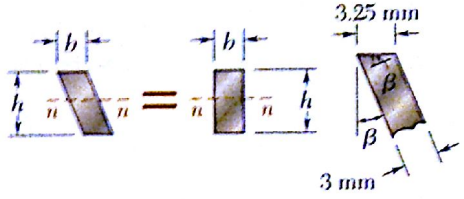


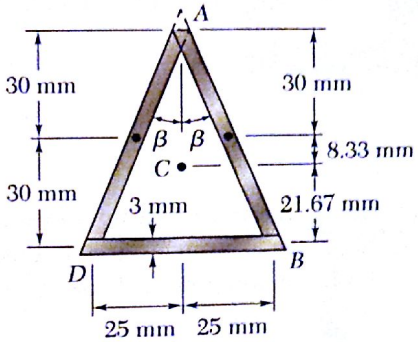
Centroide. Se observa que $AB = AD = 65$ mm

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma\, \bar{y}A}{\Sigma\, A} = \frac{2[(65\text{ mm})(3\text{ mm})(30\text{ mm})]}{2[(65\text{ mm})(3\text{ mm})] + (50\text{ mm})(3\text{ mm})}$$

$$\bar{Y} = 21.67\text{ mm}$$

Momento centroidal de inercia. Cada lado de la viga de pared delgada puede considerarse como un paralelogramo y se recuerda que para el caso mostrado $I_{nn} = bh^3/12$ donde b se mide paralela al eje nn.

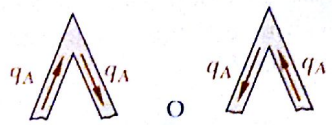




$$b = (3\text{ mm})/\cos\beta = (3\text{ mm})/(12/13) = 3.25\text{ mm}$$

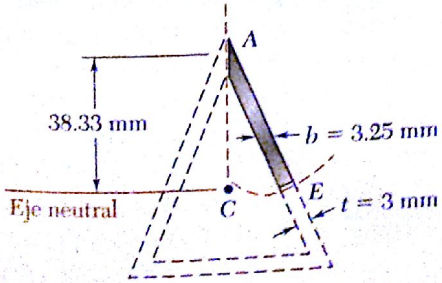
$$I = \Sigma(\bar{I} + Ad^2) = 2[\tfrac{1}{12}(3.25\text{ mm})(60\text{ mm})^3 + (3.25\text{ mm})(60\text{ mm})(8.33\text{ mm})^2] + [\tfrac{1}{12}(50\text{ mm})(3\text{ mm})^3 + (50\text{ mm})(3\text{ mm})(21.67\text{ mm})^2]$$

$$I = 214.6 \times 10^3\text{ mm}^4 \qquad I = 0.2146 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$



***a*) Esfuerzos cortantes en *A*.** Si en A ocurre un cortante τ_A, el flujo de cortante será $q_A = \tau_A t$ y debe dirigirse en una de las dos maneras mostradas en la figura. Como la sección transversal y la carga son simétricas con respecto a una línea vertical que pasa por A, el flujo de cortante también debe ser simétrico. Puesto que ninguno de los posibles flujos de cortante es simétrico, se concluye que $\tau_A = 0$ ◀

***b*) Esfuerzo cortante máximo.** Como el ancho de la pared delgada es constante, el máximo esfuerzo cortante ocurre en el eje neutro donde Q es máximo. Como se sabe que el esfuerzo cortante en A es cero, se corta la sección a lo largo de la línea punteada mostrada en la figura y se aísla la parte sombreada de la viga. Para obtener el esfuerzo cortante máximo, el corte en el eje neutro se hace perpendicular a los lados y con una longitud de $t = 3$ mm.



$$Q = [(3.25\text{ mm})(38.33\text{ mm})]\left(\frac{38.33\text{ mm}}{2}\right) = 2\,387\text{ mm}^3$$

$$Q = 2.387 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

$$\tau_E = \frac{VQ}{It} = \frac{(5\text{ kN})(2.387 \times 10^{-6}\text{ m}^3)}{(0.2146 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(0.003\text{ m})} \qquad \tau_{máx} = \tau_E = 18.54\text{ MPa}$$ ◀

PROBLEMAS

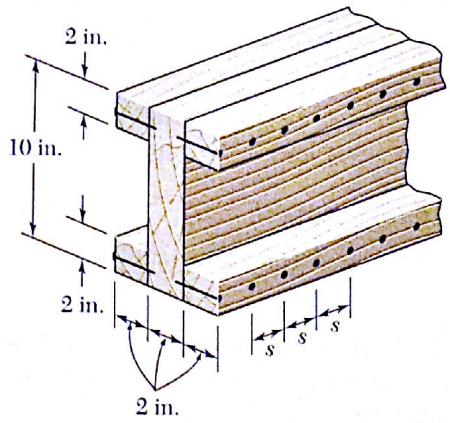


Figura P6.29

6.29 La viga compuesta de madera que se muestra en la figura se somete a un corte vertical de 1 200 lb. Si se sabe que la fuerza cortante permisible en los clavos es de 75 lb, determine el máximo espaciamiento permisible s entre los clavos.

6.30 Dos tablas de 20 × 100 mm y dos de 20 × 180 mm se pegan para formar una viga tipo caja de 120 × 200 mm. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 3.5 kN, determine el esfuerzo cortante promedio en la junta pegada *a*) en *A*, *b*) en *B*.

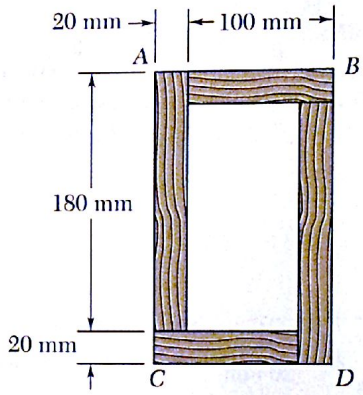


Figura *P6.30*

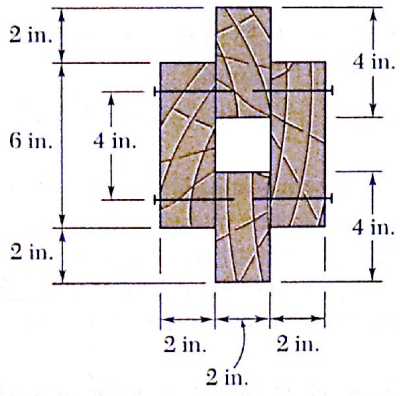


Figura P6.31

6.31 La viga compuesta de madera que se muestra en la figura está sujeta a un cortante vertical de 1 500 lb. Si se sabe que el espaciamiento longitudinal de los clavos es $s = 2.5$ in. y que cada clavo tiene 3.5 in. de longitud, calcule la fuerza cortante en cada clavo.

6.32 La viga compuesta de madera que se muestra en la figura está sujeta a un corte vertical de 8 kN. Si se sabe que los clavos están espaciados longitudinalmente cada 60 mm en *A* y cada 25 mm en *B*, determine la fuerza cortante sobre los clavos *a*) en *A*, *b*) en *B*. (*Datos*: $I_x = 1.504 \times 10^9$ mm^4.)

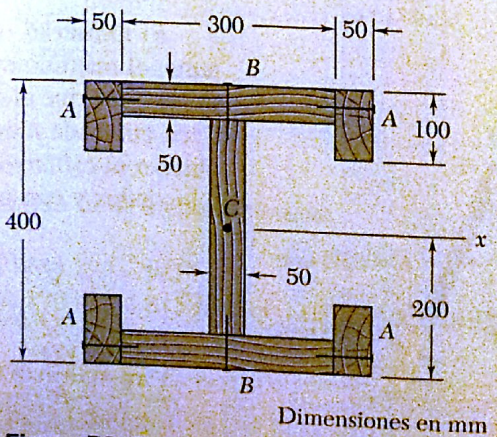
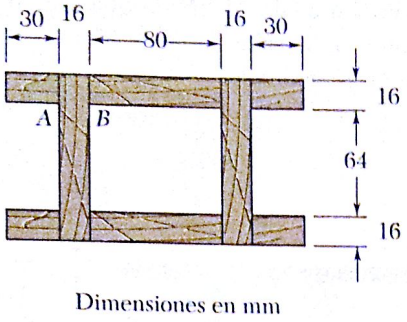


Figura P6.32

6.33 La viga compuesta que se muestra en la figura se fabricó pegando varias tablas de madera. Si se sabe que la viga está sujeta a un cortante vertical de 5 kN, determine el esfuerzo cortante promedio en la junta pegada *a*) en *A*, *b*) en *B*.



Dimensiones en mm

Figura *P6.33*

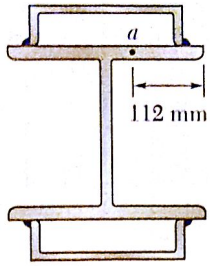


Figura P6.34

6.34 La viga compuesta que se muestra en la figura se fabricó al soldar canales de acero laminado C200 × 17.1 a los patines de un perfil de acero laminado W250 × 80. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 200 kN, determine *a*) la fuerza cortante horizontal por metro en cada soldadura, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *a* del perfil de patín ancho.

6.35 Si un cortante vertical dado **V** causa un esfuerzo máximo de corte de 10 ksi en la extrusión con forma de sombrero que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante correspondiente en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

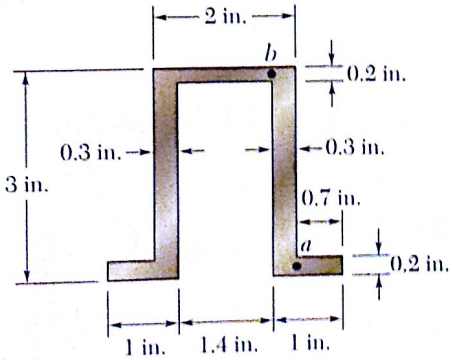


Figura P6.35

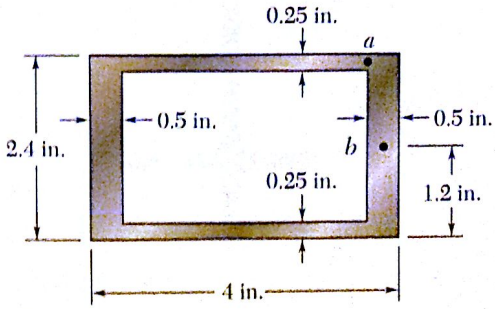


Figura *P6.36*

6.36 Una viga extruida de aluminio tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Si se sabe que el cortante vertical en la viga es de 10 kips, determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.

6.37 Una viga extruida tiene la sección transversal que se muestra en la figura y un grosor de pared uniforme de 0.20 in. Si se sabe que un cortante vertical dado **V** causa un esfuerzo cortante máximo $\tau = 9$ ksi, determine el esfuerzo cortante en los cuatro puntos indicados.

6.38 Retome el problema 6.37, y ahora suponga que la viga está sometida a un cortante horizontal **V**.

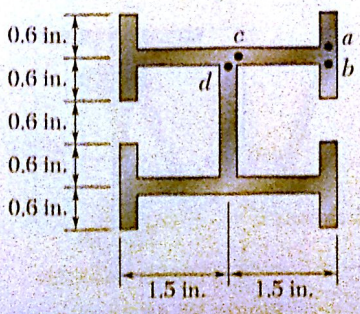


Figura P6.37

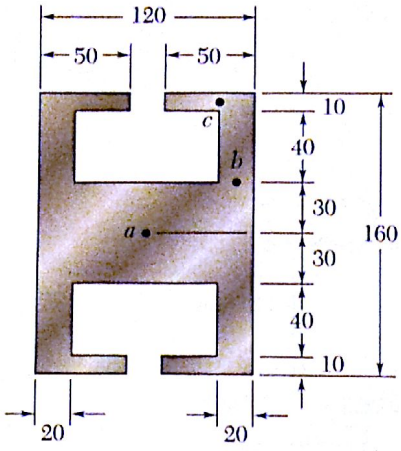


Figura P6.39

6.39 Si se sabe que un cortante vertical dado **V** causa un esfuerzo cortante máximo de 75 MPa en una viga extruida que tiene la sección transversal mostrada, determine el esfuerzo cortante en los tres puntos indicados.

6.40 Retome el problema 6.39, y ahora suponga que la viga está sometida a un cortante horizontal **V**.

6.41 El cortante vertical es de 25 kN en una viga que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si se sabe que $d = 50$ mm, determine el esfuerzo cortante *a*) en el punto *a*, *b*) en el punto *b*.

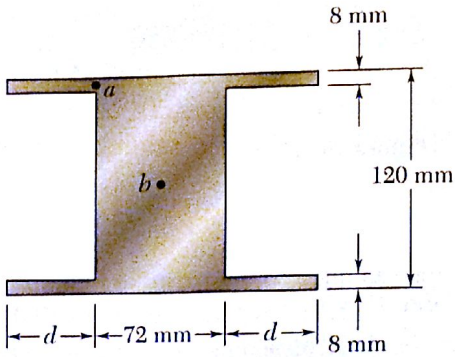


Figura P6.41 y P6.42

6.42 El cortante vertical es de 25 kN en una viga que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Determine *a*) la distancia *d* para la cual $\tau_a = \tau_b$, *b*) el esfuerzo cortante correspondiente en los puntos *a* y *b*.

6.43 Tres tablas están conectadas como se muestra en la figura mediante pernos de 14 mm de diámetro, espaciados cada 150 mm a lo largo del eje longitudinal de la viga. Determine el esfuerzo cortante promedio en los pernos, para un cortante vertical de 10 kN.

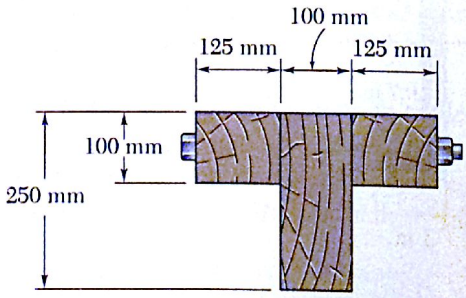


Figura P6.43

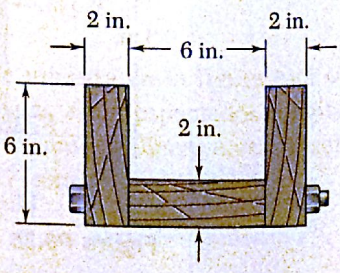


Figura P6.44

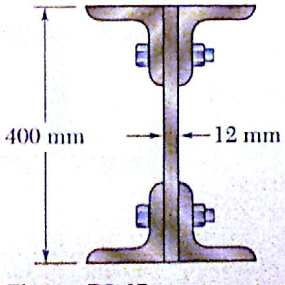


Figura P6.45

6.44 Una viga consiste en tres tablas conectadas mediante pernos de $\frac{3}{8}$ in. de diámetro, espaciados cada 12 in. a lo largo del eje longitudinal de la viga. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 2 500 lb, determine el esfuerzo cortante promedio en los pernos.

6.45 Cuatro ángulos de acero L102 × 102 × 9.5 y una placa de acero de 12 × 400 mm se unen con pernos para formar una viga con la sección transversal que se muestra en la figura. Los pernos tienen un diámetro de 22 mm y están espaciados longitudinalmente cada 120 mm. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 240 kN, determine el esfuerzo cortante promedio en cada perno.

6.46 Tres placas de acero de 1 × 18 in. se unen con pernos a cuatro ángulos L6 × 6 × 1 para formar una viga con la sección transversal que se muestra en la figura. Los pernos tienen un diámetro de $\frac{7}{8}$ in. y están espaciados longitudinalmente cada 5 in. Si se sabe que el esfuerzo cortante promedio permisible en los pernos es de 12 ksi, determine el máximo cortante vertical permisible en la viga. (*Dato*: I_x = 6 123 in.^{4})

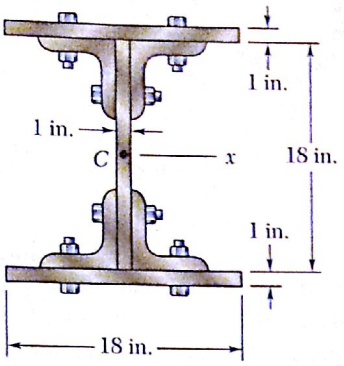


Figura P6.46

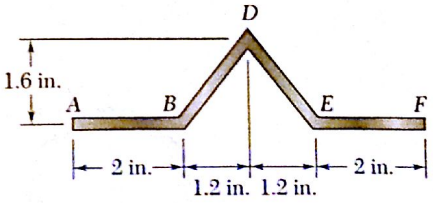


Figura *P6.47*

6.47 Una placa de $\frac{1}{4}$ in. de espesor se corruga de la forma mostrada en la figura y después se emplea como viga. Para un cortante vertical de 1.2 kips, determine *a*) el esfuerzo cortante máximo en la sección, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *B*. También elabore un esquema del flujo cortante en la sección transversal.

6.48 Una viga extruida con la sección transversal que se muestra en la figura y un espesor de pared de 3 mm está sujeta a un cortante vertical de 10 kN. Determine *a*) el esfuerzo cortante en el punto *A*, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga. También bosqueje el flujo cortante en la sección transversal.

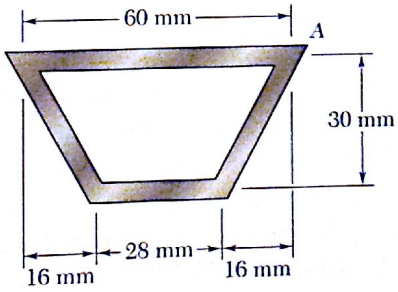


Figura P6.48

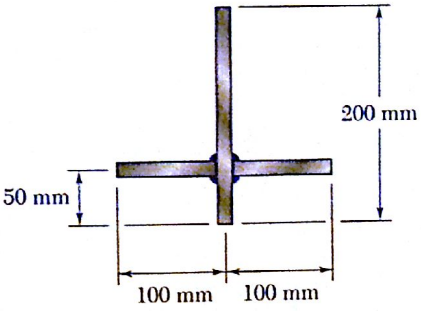


Figura P6.49

6.49 Tres placas, cada una de 12 mm de espesor, se sueldan para formar la sección mostrada en la figura. Para un cortante vertical de 100 kN, determine el flujo cortante a través de las superficies soldadas y bosqueje el flujo cortante en la sección transversal.

6.50 Una placa de espesor *t* se dobla como lo muestra la figura y después se usa como viga. Para un cortante vertical de 600 lb, determine *a*) el espesor *t* para el cual el máximo esfuerzo cortante es de 300 psi, *b*) el esfuerzo cortante correspondiente en el punto *E*. También elabore un esquema del flujo cortante en la sección transversal.

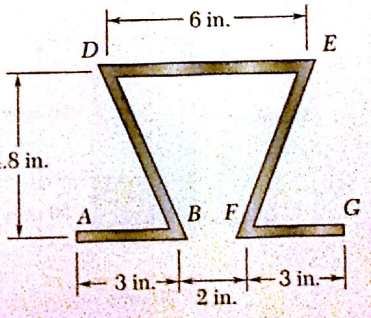


Figura *P6.50*

6.51 y 6.52 Una viga extruida tiene un espesor uniforme de pared t. Si se denota con **V** el cortante vertical y con A el área transversal de la viga, exprese el esfuerzo cortante máximo como $\tau_{máx} = k(V/A)$ y determine la constante k para cada una de las dos orientaciones mostradas.

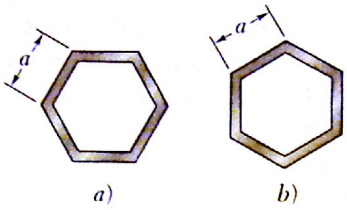


Figura P6.51

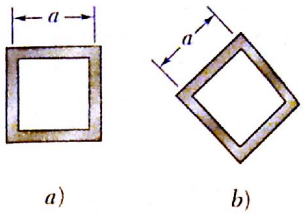


Figura P6.52

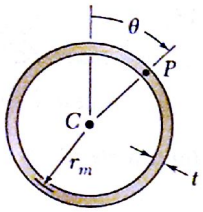


Figura P6.53

6.53 *a*) Determine el esfuerzo cortante en el punto P de un tubo de pared delgada, con la sección transversal que se muestra en la figura, causado por un cortante vertical **V**. *b*) Muestre que el máximo esfuerzo cortante ocurre para $\theta = 90°$ y que es igual a $2V/A$ donde A es el área de la sección transversal del tubo.

6.54 El diseño de una viga requiere soldar cuatro placas horizontales a una placa vertical de 0.5 × 5 in. como se muestra en la figura. Para un cortante vertical **V**, determine la dimensión h para la que el flujo cortante a través de las superficies soldadas es máximo.

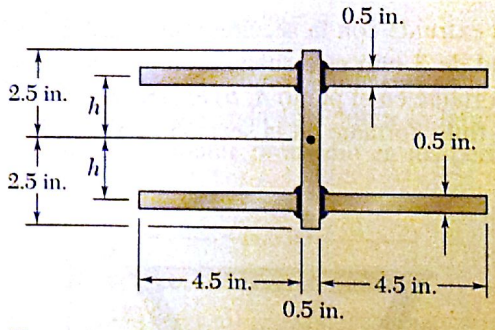


Figura P6.54

6.55 Para una viga hecha de dos o más materiales con diferentes módulos de elasticidad, muestre que la ecuación (6.6)

$$\tau_{prom} = \frac{VQ}{It}$$

permanece válida si tanto Q como I se calculan utilizando la sección transformada de la viga (vea la sección 4.6) y además si t es el ancho real de la viga donde se calcula τ_{prom}.

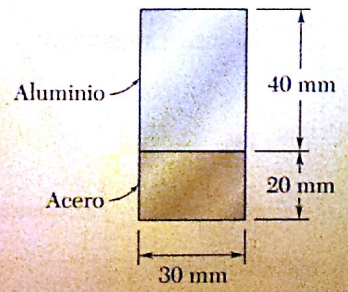


Figura *P6.56*

6.56 Una barra de acero y una barra de aluminio están unidas como se muestra en la figura para formar una viga compuesta. Si se sabe que el cortante vertical en la viga es de 20 kN y que el módulo de elasticidad es de 210 GPa para el acero y de 70 GPa para el aluminio, determine *a*) el esfuerzo promedio en la superficie pegada, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga. (*Sugerencia*: Utilice el método indicado en el problema 6.55.)

6.57 Una barra de acero y una barra de aluminio están pegadas como se muestra en la figura para formar una viga compuesta. Si se sabe que el cortante vertical en la viga es de 4 kips y que el módulo de elasticidad es de 29×10^6 psi para el acero y 10.6×10^6 psi para el aluminio, determine *a*) el esfuerzo promedio en la superficie pegada, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga. (*Sugerencia*: Utilice el método indicado en el problema 6.55.)

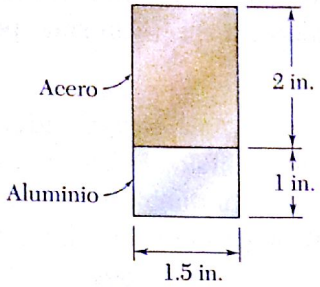


Figura P6.57

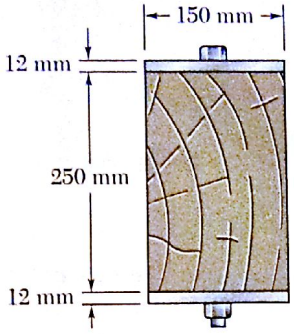


Figura *P6.58*

6.58 Una viga compuesta se fabrica al unir las porciones de madera y de acero que se muestran en la figura con pernos de 12 mm de diámetro espaciados longitudinalmente cada 200 mm. El módulo de elasticidad es de 10 GPa para la madera y de 200 GPa para el acero. Para un cortante vertical de 4 kN, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en los pernos, *b*) el esfuerzo cortante en el centro de la sección transversal. (*Sugerencia*: Utilice el método indicado en el problema 6.55.)

6.59 Una viga compuesta se fabrica con la unión de las porciones de madera y de acero que se muestran en la figura con pernos de $\frac{5}{8}$ in. de diámetro espaciados longitudinalmente cada 8 in. El módulo de elasticidad es de 1.9×10^6 psi para la madera y de 29×10^6 psi para el acero. Para un cortante vertical de 4 000 lb, determine *a*) el esfuerzo cortante promedio en los pernos, *b*) el esfuerzo cortante en el centro de la sección transversal. (*Sugerencia*: Utilice el método indicado en el problema 6.55.)

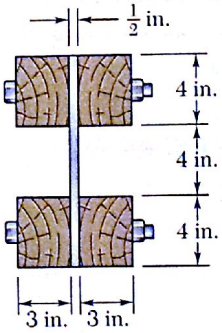


Figura P6.59

6.60 Considere la viga en voladizo *AB* analizada en la sección 6.8 y la porción *ACKJ* de la viga que está localizada a la izquierda de la sección transversal *CC'* y por encima del plano horizontal *JK*, donde *K* es un punto a una distancia $y < y_Y$ por encima del eje neutro (figura P6.60). *a*) Si se considera que $\sigma_x = \sigma_Y$ entre *C* y *E* y $\sigma_x = (\sigma_Y/y_Y)y$ entre *E* y *K*, muestre que la magnitud de la fuerza cortante horizontal **H** ejercida sobre la cara inferior de la porción de la viga *ACKJ* es

$$H = \frac{1}{2} b\sigma_Y \left(2c - y_Y - \frac{y^2}{y_Y}\right)$$

b) Si se observa que el esfuerzo cortante en *K* es

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta H}{\Delta A} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{b} \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial x}$$

y se recuerda que y_Y es una función de *x* definida por la ecuación (6.14), deduzca la ecuación (6.15).

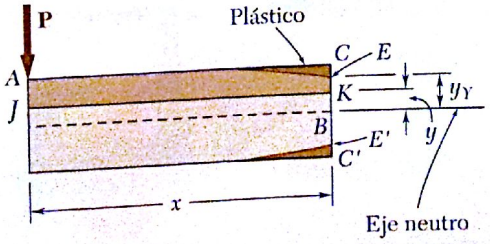


Figura P6.60

*6.9 CARGA ASIMÉTRICA DE ELEMENTOS DE PARED DELGADA. CENTRO DE CORTANTE

El análisis de los efectos de cargas transversales en el capítulo 5 y en las secciones precedentes se limitó a elementos con un plano vertical de simetría y a cargas aplicadas en ese plano. Se observó que los elementos se flexionaban en el plano de carga (figura 6.42) y en cualquier sección transversal, el momento flector **M** y el cortante **V** (figura 6.43) fueron a parar en esfuerzos normales y cortantes definidos, respectivamente, por las ecuaciones:

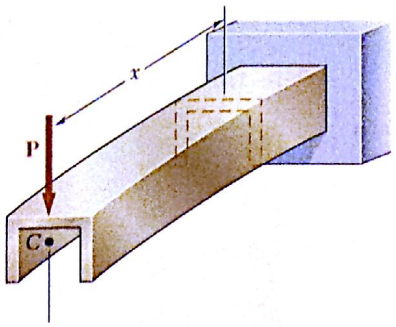
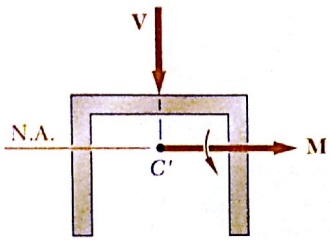


Figura 6.42

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

y

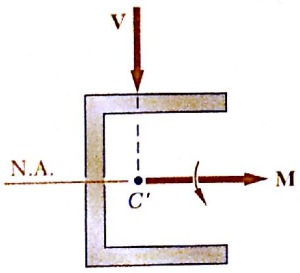
$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$



$(V = P, M = Px)$

Figura 6.43

En esta sección se analizarán los efectos de cargas transversales en *elementos de pared delgada sin plano vertical de simetría*. Suponga, por ejemplo, que el elemento en canal de la figura 6.42 ha girado 90° y que la línea de acción de **P** pasa todavía por el centroide de la sección final. El vector par **M** que representa el momento flector en una sección dada todavía se dirige a lo largo del eje principal de la sección (figura 6.44), y el eje neutro coincidirá con ese eje (véase sección 4.13). Por tanto, la ecuación (4.16) se aplica y puede utilizarse para calcular los esfuerzos normales en la sección. Sin embargo, la ecuación (6.6) no puede usarse para calcular los esfuerzos cortantes en la sección, ya que se dedujo para un cuerpo con un plano vertical de simetría (véase sección 6.7). En realidad, se observará que el elemento se *flexionará y torcerá* bajo la carga aplicada (figura 6.45) y la distribución resultante de esfuerzos cortantes será muy diferente de la definida por la ecuación (6.6).



$(V = P, M = Px)$

Figura 6.44

Ahora surge la siguiente pregunta: ¿Es posible aplicar la carga vertical **P** de tal manera que el elemento en canal de la figura 6.45 *se flexione sin torsión*?; y si es así, ¿dónde debe aplicarse **P**? Si el elemento se flexiona sin torsión, entonces el esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección puede obtenerse de la ecuación (6.6), en donde Q es el primer momento del área sombreada con respecto al eje neutro (figura 6.46*a*), y la distribución de esfuerzos será la de la figura 6.46*b*, con $\tau = 0$ tanto en A como en E. Se nota

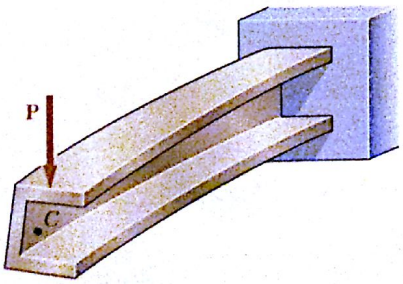


Figura 6.45

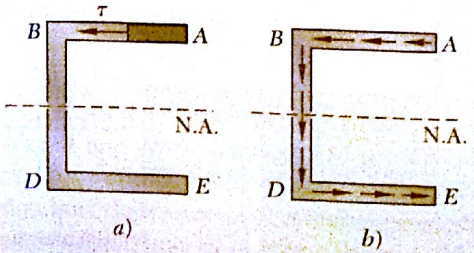


Figura 6.46

que la fuerza cortante ejercida sobre un pequeño elemento de área $dA = t\,ds$ es $dF = \tau dA = \tau t\,ds$, o $dF = q\,ds$ (figura 6.47*a*), donde q es el flujo de cortante $q = \tau t = VQ/I$ en el punto considerado. Se encuentra que la resultante de las fuerzas cortantes ejercida sobre los elementos de la aleta superior *AB* del canal es una fuerza horizontal **F** (figura 6.47*b*) de magnitud

$$F = \int_A^B q\,ds \tag{6.17}$$

Debido a la simetría del canal con respecto a su eje neutro, la resultante de las fuerzas cortantes ejercida sobre la aleta inferior *DE* es una fuerza **F′** de igual magnitud a **F** pero de sentido contrario. Se concluye que la resultante de las fuerzas cortantes ejercidas sobre el alma *BD* debe ser igual a la fuerza cortante vertical **V** en la sección:

$$V = \int_B^D q\,ds \tag{6.18}$$

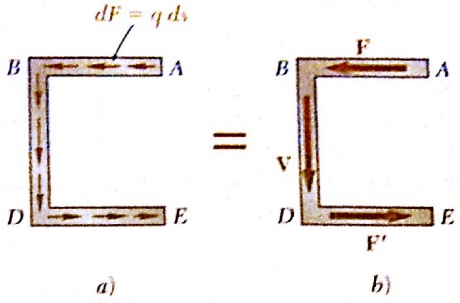


Figura 6.47

Ahora se observa que las fuerzas **F** y **F′** forman un par de momento *Fh*, donde *h* es la distancia entre las líneas centrales de las aletas *AB* y *DE* (figura 6.48*a*). Este par puede eliminarse si el cortante vertical **V** se mueve a la izquierda a una distancia *e* tal que el momento de **V** con respecto a *B* sea igual a *Fh* (figura 6.48*b*). Se escribe $Ve = Fh$ o

$$e = \frac{Fh}{V} \tag{6.19}$$

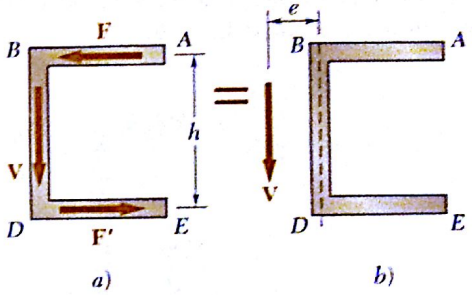


Figura 6.48

y se concluye que, cuando la fuerza **P** se aplica a una distancia *e* a la izquierda de la línea central del alma *BD*, el elemento se flexiona sin torsión en un plano vertical (figura 6.49).

El punto *O*, donde la línea de acción de **P** corta el eje de simetría de la sección externa, es el *centro de cortante* de la sección. Note que en el caso de una carga oblicua **P** (figura 6.50*a*), el elemento también estará libre de cualquier torsión si la carga **P** se aplica en el centro de cortante de la sección. En realidad, la carga **P** puede descomponerse en dos componentes $\mathbf{P}_z$ y $\mathbf{P}_y$ (figura 6.50*b*) correspondientes, respectivamente, a las condiciones de carga de las figuras 6.42 y 6.49, ninguna de las cuales hace que el elemento se torsione.

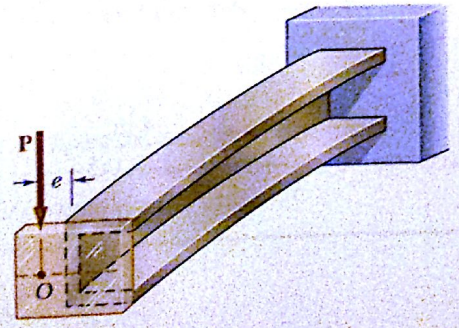


Figura 6.49

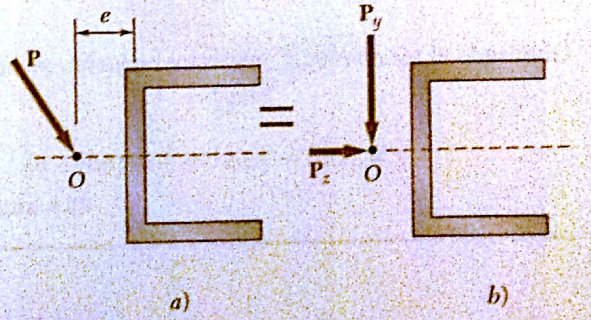


Figura 6.50

EJEMPLO 6.05

Determine el centro de cortante O de una sección en canal de espesor uniforme (figura 6.51), considerando que $b = 4$ in., $h = 6$ in. y $t = 0.15$ in.

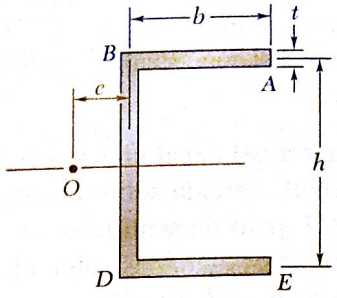


Figura 6.51

Suponiendo que el elemento no está torcido, se obtiene primero el flujo de cortante q en la aleta AB a una distancia s de A (figura 6.52). Recordando la ecuación (6.5) y observando que el primer momento Q del área sombreada con respecto al eje neutro es $Q = (st)(h/2)$, se escribe

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vsth}{2I} \tag{6.20}$$

donde V es el cortante vertical e I el momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro.

Recordando la ecuación (6.17), se determina la magnitud de la fuerza cortante **F** ejercida sobre la aleta AB integrando el flujo de cortante q desde A hasta B:

$$F = \int_0^b q\,ds = \int_0^b \frac{Vsth}{2I}\,ds = \frac{Vth}{2I}\int_0^b s\,ds$$

$$F = \frac{Vthb^2}{4I} \tag{6.21}$$

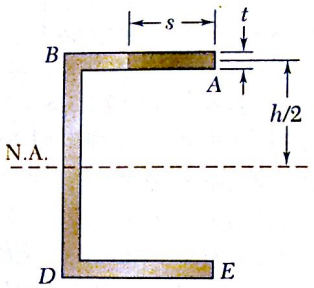


Figura 6.52

La distancia e desde la línea central del alma BD al centro de cortante O puede obtenerse ahora de la ecuación (6.19):

$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^2}{4I}\frac{h}{V} = \frac{th^2b^2}{4I} \tag{6.22}$$

El momento de inercia I de la sección canal puede expresarse como:

$$I = I_{\text{alma}} + 2I_{\text{aleta}}$$

$$= \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

Olvidando el término en t^3, por muy pequeño, se tiene

$$I = \tfrac{1}{12}th^3 + \tfrac{1}{2}tbh^2 = \tfrac{1}{12}th^2(6b + h) \tag{6.23}$$

Sustituyendo esta expresión en la (6.22), se escribe

$$e = \frac{3b^2}{6b + h} = \frac{b}{2 + \dfrac{h}{3b}} \tag{6.24}$$

Se nota que la distancia e no depende de t y que puede variar de 0 a $b/2$, de acuerdo con el valor de la relación $h/3b$. Para la sección de canal dada, se tiene

$$\frac{h}{3b} = \frac{6\text{ in.}}{3(4\text{ in.})} = 0.5$$

y

$$e = \frac{4\text{ in.}}{2 + 0.5} = 1.6\text{ in.}$$

EJEMPLO 6.06

Para la sección en canal del ejemplo 6.05, halle la distribución de esfuerzos cortantes producidos por un cortante vertical **V** de 2.5 kips aplicado en el centro de cortante O (figura 6.53).

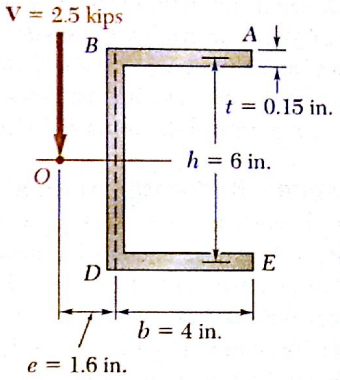


Figura 6.53

Esfuerzos cortantes en las aletas. Como **V** se aplica en el centro de cortante, no hay torsión y los esfuerzos en la aleta AB se obtienen de la ecuación (6.20), del ejemplo 6.05. Se tiene

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It} = \frac{Vh}{2I}s \tag{6.25}$$

que muestra que la distribución de esfuerzos en la aleta AB es lineal. Haciendo $s = b$ y sustituyendo por I de la ecuación (6.23), se obtiene el valor del esfuerzo cortante en B:

$$\tau_B = \frac{Vhb}{2(\frac{1}{12}th^2)(6b + h)} = \frac{6Vb}{th(6b + h)} \tag{6.26}$$

Haciendo $V = 2.5$ kips y usando las dimensiones dadas,

$$\tau_B = \frac{6(2.5 \text{ kips})(4 \text{ in.})}{(0.15 \text{ in.})(6 \text{ in.})(6 \times 4 \text{ in.} + 6 \text{ in.})}$$
$$= 2.22 \text{ ksi}$$

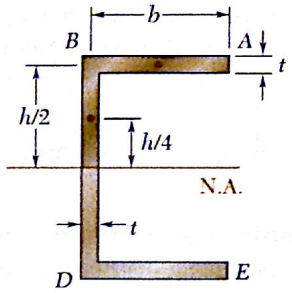


Figura 6.54

Esfuerzos cortantes en el alma. La distribución de los esfuerzos cortantes en el alma BD es parabólica, como en el caso de la viga W, y el máximo esfuerzo ocurre en el eje neutro. Calculando el primer momento de la mitad superior de la sección transversal con respecto al eje neutro (figura 6.54), se escribe

$$Q = bt(\tfrac{1}{2}h) + \tfrac{1}{2}ht(\tfrac{1}{4}h) = \tfrac{1}{8}ht(4b + h) \tag{6.27}$$

Sustituyendo por I y Q de (6.23) y (6.27), respectivamente, en la expresión para el esfuerzo cortante, se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(\frac{1}{8}ht)(4b + h)}{\frac{1}{12}th^2(6b + h)t} = \frac{3V(4b + h)}{2th(6b + h)}$$

o, con los datos dados

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3(2.5 \text{ kips})(4 \times 4 \text{ in.} + 6 \text{ in.})}{2(0.15 \text{ in.})(6 \text{ in.})(6 \times 4 \text{ in.} + 6 \text{ in.})}$$
$$= 3.06 \text{ ksi}$$

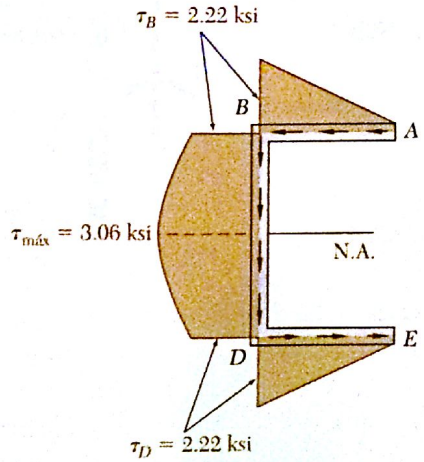


Figura 6.55

Distribución de esfuerzos sobre la sección. En la figura 6.55 se muestra la gráfica de la distribución de esfuerzos cortantes sobre la sección completa del canal.

EJEMPLO 6.07

Para la sección en canal del ejemplo 6.05, y despreciando concentraciones de esfuerzos, determine el máximo esfuerzo cortante causado por una fuerza cortante vertical **V** de 2.5 kips aplicada en el centroide *C* de la sección, que está localizado a 1.143 in. a la derecha de la línea central del alma *BD* (figura 6.56).

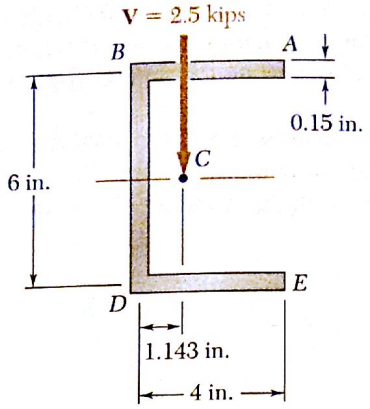


Figura 6.56

Sistema equivalente fuerza-par en el centro del cortante. El centro de cortante *O* de la sección transversal se determinó en el ejemplo 6.05 y se encontró a una distancia $e = 1.6$ in. a la izquierda de la línea central del alma *BD*. El cortante **V** (figura 6.57*a*) se reemplazará por un sistema equivalente fuerza-par en el centro de cortante *O* (figura 6.57*b*). Este sistema consta de una fuerza **V** de 2.5 kips y de un par de torsión **T** de magnitud

$$T = V(OC) = (2.5 \text{ kips})(1.6 \text{ in.} + 1.143 \text{ in.})$$
$$= 6.86 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$

Esfuerzos debidos a la flexión. La fuerza **V** de 2.5 kips flexiona el elemento, y la distribución correspondiente de esfuerzos cortantes en la sección (figura 6.57*c*) se determinó en el ejemplo 6.06. Recuerde que el máximo valor del esfuerzo debido a esta fuerza era

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{flexión}} = 3.06 \text{ ksi}$$

Esfuerzos debidos a la torsión. El par **T** torsiona el elemento y la correspondiente distribución de esfuerzos se ilustra en la figura 6.57*d*. Recuerde, de la sección 3.12, que la analogía de la membrana muestra que, en un elemento de pared delgada de espesor uniforme, el esfuerzo causado por un par de torsión **T** es máximo a lo largo del borde de la sección. Usando las ecuaciones (3.45) y (3.43)

$$a = 4 \text{ in.} + 6 \text{ in.} + 4 \text{ in.} = 14 \text{ in.}$$
$$b = t = 0.15 \text{ in.} \qquad b/a = 0.0107$$

se tiene

$$c_1 = \tfrac{1}{3}(1 - 0.630b/a) = \tfrac{1}{3}(1 - 0.630 \times 0.0107) = 0.331$$
$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{torsión}} = \frac{T}{c_1 ab^2} = \frac{6.86 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{(0.331)(14 \text{ in.})(0.15 \text{ in.})^2} = 65.8 \text{ ksi}$$

Esfuerzos combinados. El esfuerzo máximo debido a flexión y torsión combinada ocurre en el eje neutro, en la superficie interna del alma, y es

$$\tau_{\text{máx}} = 3.06 \text{ ksi} + 65.8 \text{ ksi} = 68.9 \text{ ksi}$$

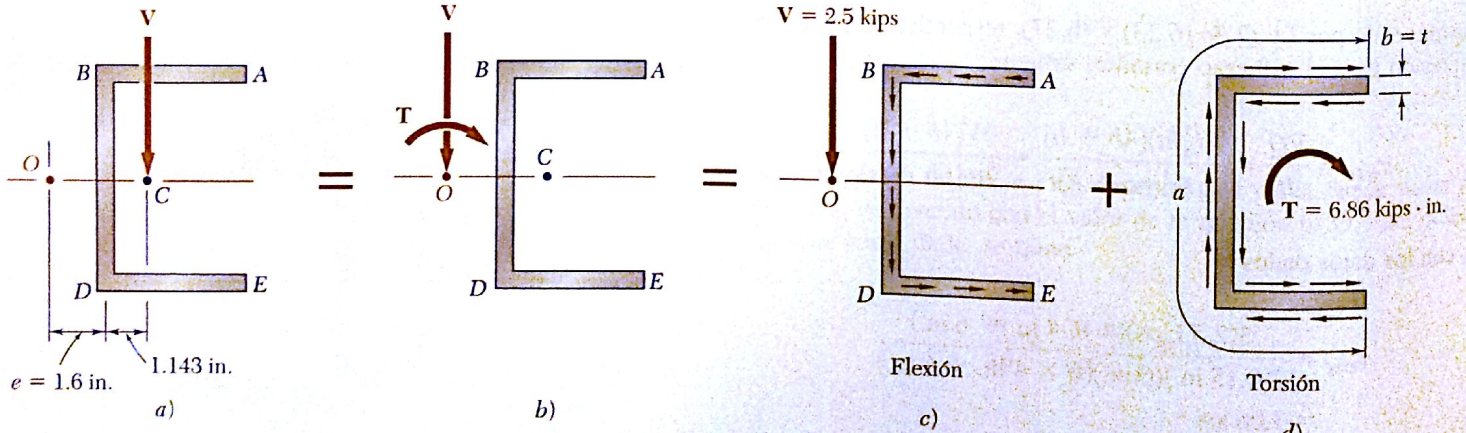


Figura 6.57

Volviendo la atención a elementos de pared delgada sin plano de simetría, considere el caso de un ángulo sometido a una carga vertical **P**. Si el elemento se orienta de manera que la carga **P** sea perpendicular a uno de los ejes principales centroidales Cz de la sección, el vector par **M**, que representa el momento flector en una sección dada, se dirigirá a lo largo de Cz (figura 6.58) y el eje neutro coincidirá con ese eje (véase sección 4.13). La ecuación (4.16) es aplicable y puede usarse para calcular los esfuerzos normales en la sección. Ahora se debe determinar dónde se aplica la fuerza **P** si la ecuación (6.6) ha de definir los esfuerzos cortantes en la sección, es decir, si el elemento ha de *flexionarse sin torsión*.

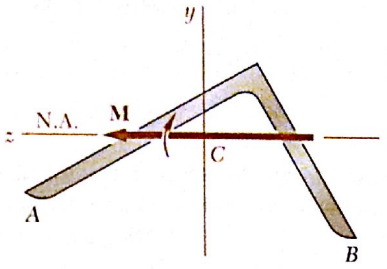
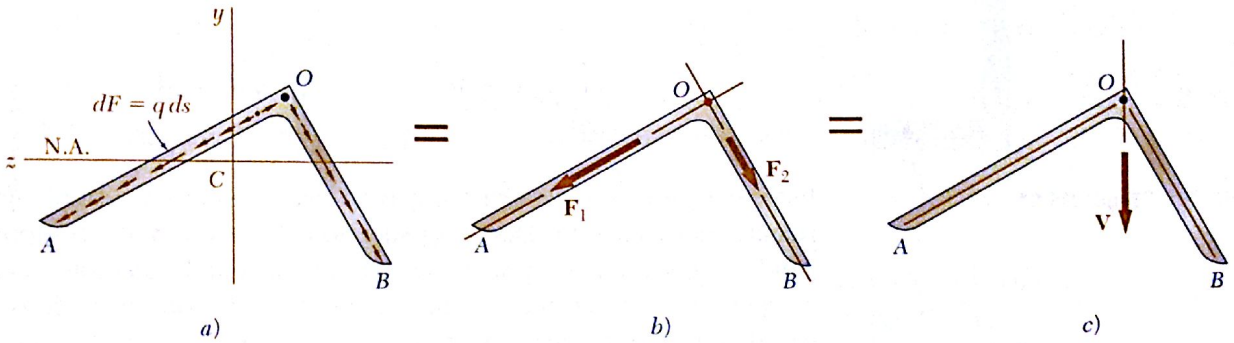


Figura 6.58

Suponga que los esfuerzos cortantes en la sección están dados por la ecuación (6.6). Como en el caso de la sección en canal considerada antes, las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la sección pueden expresarse como $dF = q\,ds$, con $q = VQ/I$, donde Q es el primer momento con respecto al eje neutro (figura 6.59*a*).



a) *b)* *c)*

Figura 6.59

Observe que la resultante de las fuerzas cortantes ejercidas sobre la porción OA de la sección es una fuerza $\mathbf{F}_1$ dirigida según OA, y que la resultante de las fuerzas cortantes en OB es una fuerza $\mathbf{F}_2$ aplicada a lo largo de OB (figura 6.59*b*). Como $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ pasan por el punto O en la esquina del ángulo, se sigue que su propia resultante, que es el cortante **V** de la sección, debe pasar también por O (figura 6.59*c*). Se concluye que el elemento no se torcerá si la línea de acción de **P** pasa por la esquina O de la sección en la cual se aplica.

El mismo razonamiento puede aplicarse cuando la carga **P** es perpendicular al otro eje principal centroidal Cy de la sección. Y, como cualquier carga **P** aplicada en la esquina O de la sección puede descomponerse en componentes perpendiculares a los ejes principales, se sigue que el elemento no se torsionará si cada carga se aplica en la esquina O de la sección. Se concluye que O es el centro de cortante de la sección.

En muchas estructuras se usan ángulos colocados de tal manera que una de sus aletas queda vertical y la otra horizontal. Del análisis anterior se sigue que tales elementos no se torcerán si se aplican fuerzas verticales a lo largo de la línea central de su aleta vertical. Observe en la figura 6.60 que la

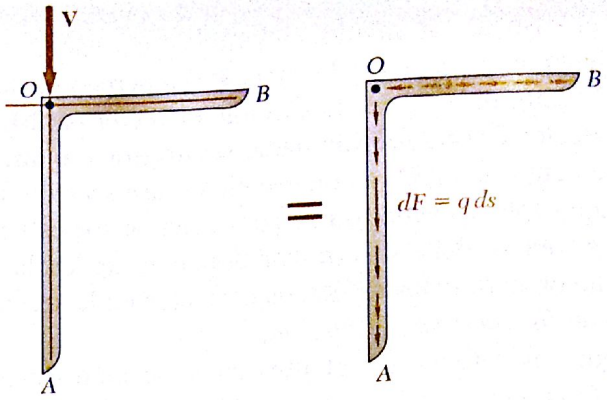


Figura 6.60

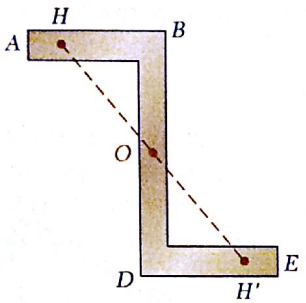


Figura 6.61

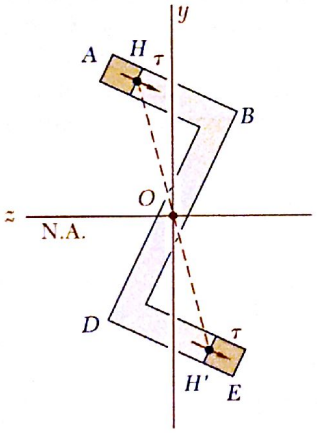


Figura 6.62

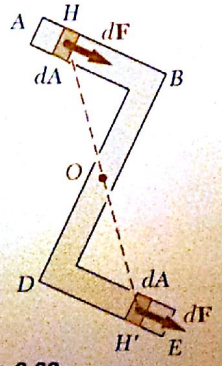


Figura 6.63

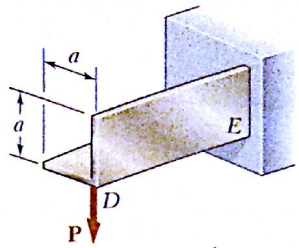
resultante de las fuerzas cortantes elementales ejercidas sobre la porción vertical OA de una sección dada será igual al cortante $\mathbf{V}$, mientras la resultante de las fuerzas cortantes en la porción horizontal OB será cero.

$$\int_O^A q\,ds = V \qquad \int_O^B q\,ds = 0$$

Esto *no* significa, sin embargo, que no habrá esfuerzo cortante en el ala horizontal del elemento. Descomponiendo el cortante $\mathbf{V}$ en componentes perpendiculares a los ejes principales centroidales de la sección y calculando el esfuerzo cortante en todo punto, se comprobaría que τ es cero en sólo un punto entre O y B (véase problema modelo 6.6).

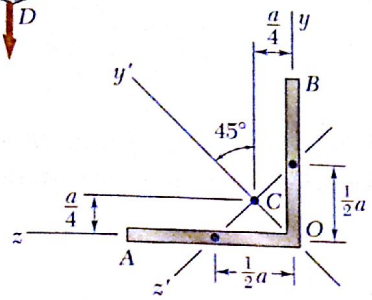
Otro tipo de elemento de pared delgada que se encuentra con frecuencia en la práctica es la forma Z. Aunque la sección transversal de un perfil Z no posee ejes de simetría, sí posee un *centro de simetría* O (figura 6.61). Esto significa que a cualquier punto H de la sección transversal, corresponde otro punto H' tal que el segmento HH' es bisecado por O. Claramente, el centro de simetría O coincide con el centroide de la sección transversal. Como se verá pronto, el punto O es también el centro de cortante de la sección.

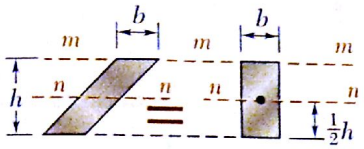
Como se hizo antes en el caso del perfil angular, se supondrá que las cargas se aplican en un plano perpendicular a uno de los ejes principales de la sección de modo que este eje es también el eje neutro de la sección (figura 6.62). Además se supone que los esfuerzos cortantes en la sección se definen por la ecuación (6.6), es decir, que el elemento se flexiona sin torsión. Si Q es el primer momento con respecto al eje neutro de la porción AH de la sección transversal y Q' es el primer momento de la porción EH', se nota que $Q' = -Q$. Así, los esfuerzos cortantes en H y H' tienen la misma magnitud y dirección, y las fuerzas cortantes ejercidas sobre pequeños elementos de área dA localizados, respectivamente, en H y H' son fuerzas iguales que tienen momentos iguales y opuestos con respecto a O (figura 6.63). Puesto que esto es cierto para cualquier par de elementos simétricos, se sigue que la resultante de las fuerzas cortantes ejercidas sobre la sección tiene un momento nulo con respecto a O. Esto significa que el cortante $\mathbf{V}$, en la sección, se dirige a lo largo de una línea que pasa por O. Como este análisis puede repetirse cuando las cargas se aplican en un plano perpendicular al otro eje principal, se concluye que O es el centro de cortante de la sección.

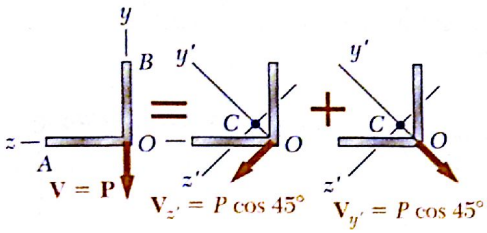


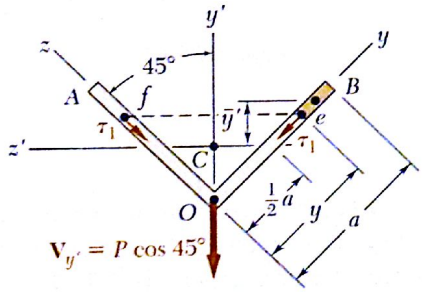
PROBLEMA MODELO 6.6

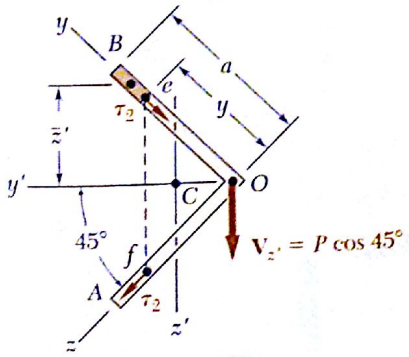
Determine la distribución de esfuerzos cortantes en el perfil angular delgado *DE* de espesor uniforme *t*, para la carga mostrada en la figura.

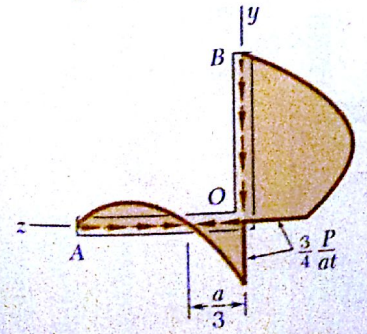












SOLUCIÓN

Centro de cortante. Recuerde, de la sección 6.9, que el centro cortante de la sección transversal de un perfil angular delgado está en su esquina. Como la carga **P** se aplica en *D*, causa flexión pero no torsión del perfil.

Ejes principales. Se localiza el centroide *C* de la sección dada *AOB*. Como el eje *y'* es un eje de simetría, los ejes *y'* y *z'* son los ejes principales centroidales de la sección. Recuerde que para el paralelogramo mostrado $I_{nn} = \frac{1}{12}bh^3$ e $I_{mm} = \frac{1}{3}bh^3$. Considerando cada aleta como un paralelogramo, determine los momentos centroidales de inercia $I_{y'}$ e $I_{z'}$:

$$I_{y'} = 2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{t}{\cos 45°}\right)(a\cos 45°)^3\right] = \frac{1}{3}ta^3$$

$$I_{z'} = 2\left[\frac{1}{12}\left(\frac{t}{\cos 45°}\right)(a\cos 45°)^3\right] = \frac{1}{12}ta^3$$

Superposición. El cortante **V** en la sección es igual a la carga **P**. Se descompone en componentes paralelas a los ejes principales.

Esfuerzos cortantes debidos a $\mathbf{V}_{y'}$. Se halla el esfuerzo cortante en el punto *e* de coordenada *y*:

$$\bar{y}' = \tfrac{1}{2}(a + y)\cos 45° - \tfrac{1}{2}a\cos 45° = \tfrac{1}{2}y\cos 45°$$

$$Q = t(a - y)\bar{y}' = \tfrac{1}{2}t(a - y)y\cos 45°$$

$$\tau_1 = \frac{V_{y'}Q}{I_{z'}t} = \frac{(P\cos 45°)[\frac{1}{2}t(a - y)y\cos 45°]}{(\frac{1}{12}ta^3)t} = \frac{3P(a - y)y}{ta^3}$$

El esfuerzo cortante en el punto *f* está representado por una función similar de *z*.

Esfuerzos cortantes debidos a $\mathbf{V}_{z'}$. Considere de nuevo el punto *e*:

$$\bar{z}' = \tfrac{1}{2}(a + y)\cos 45°$$

$$Q = (a - y)t\bar{z}' = \tfrac{1}{2}(a^2 - y^2)t\cos 45°$$

$$\tau_2 = \frac{V_{z'}Q}{I_{y'}t} = \frac{(P\cos 45°)[\frac{1}{2}(a^2 - y^2)t\cos 45°]}{(\frac{1}{3}ta^3)t} = \frac{3P(a^2 - y^2)}{4ta^3}$$

El esfuerzo cortante en el punto *f* está representado por una función similar de *z*.

Esfuerzos combinados. ***A lo largo de la aleta vertical.*** El esfuerzo cortante en el punto *e* es

$$\tau_e = \tau_2 + \tau_1 = \frac{3P(a^2 - y^2)}{4ta^3} + \frac{3P(a - y)y}{ta^3} = \frac{3P(a - y)}{4ta^3}[(a + y) + 4y]$$

$$\tau_e = \frac{3P(a - y)(a + 5y)}{4ta^3} \blacktriangleleft$$

A lo largo de la aleta horizontal. El esfuerzo cortante en el punto *f* es

$$\tau_f = \tau_2 - \tau_1 = \frac{3P(a^2 - z^2)}{4ta^3} - \frac{3P(a - z)z}{ta^3} = \frac{3P(a - z)}{4ta^3}[(a + z) - 4z]$$

$$\tau_f = \frac{3P(a - z)(a - 3z)}{4ta^3} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

6.61 a 6.64 Determine la localización del centro de cortante O de una viga de pared delgada con espesor uniforme que tiene la sección transversal mostrada en la figura.

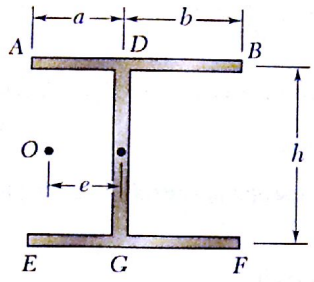


Figura P6.61

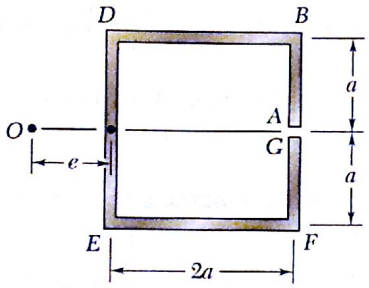


Figura P6.62

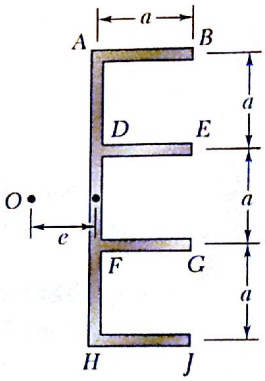


Figura P6.63

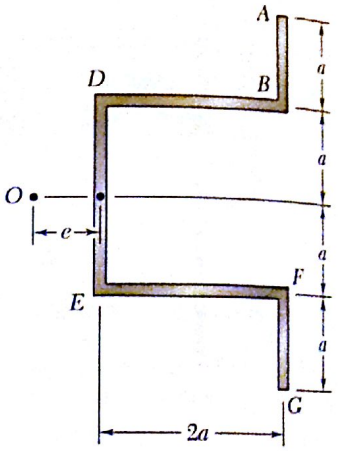


Figura P6.64

6.65* y *6.66 Una viga extruida tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine *a*) la localización del centro de cortante O, *b*) la distribución de los esfuerzos cortantes causados por una fuerza cortante vertical de 2.75 kip que se aplica en O.

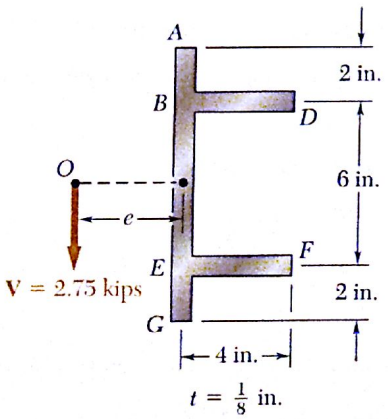


Figura *P6.65*

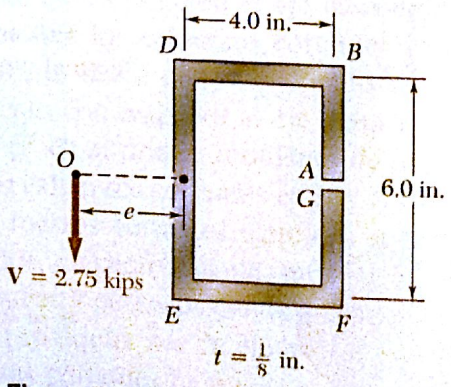


Figura *P6.66*

6.67 y 6.68 Para una viga extruida que tiene la sección transversal mostrada en la figura, determine *a*) la localización del centro de cortante *O*, *b*) la distribución de los esfuerzos cortantes causados por la fuerza cortante vertical V que se muestra en la figura y que se aplica en *O*.

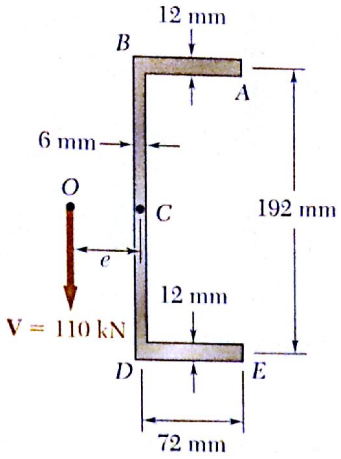


Figura P6.67

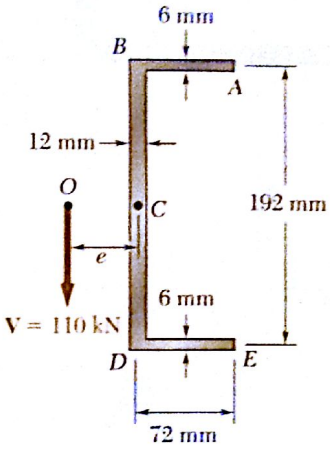


Figura P6.68

6.69 a *6.74* Determine la localización del centro de cortante *O* de una viga de pared delgada con espesor uniforme que tiene la sección transversal mostrada en la figura.

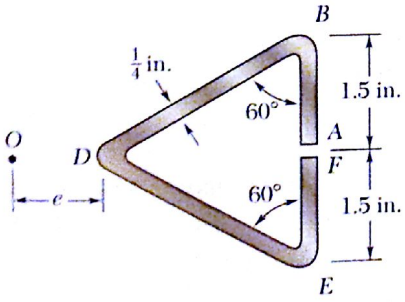


Figura P6.69

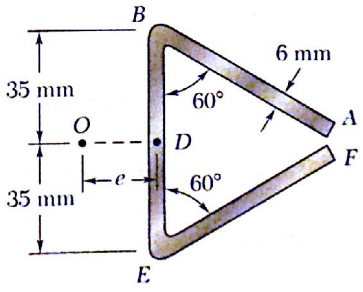


Figura P6.70

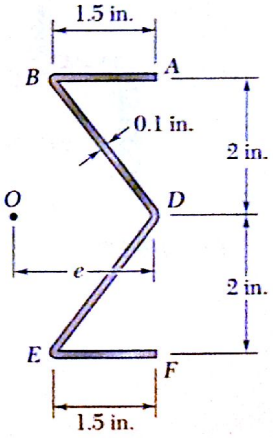


Figura P6.71

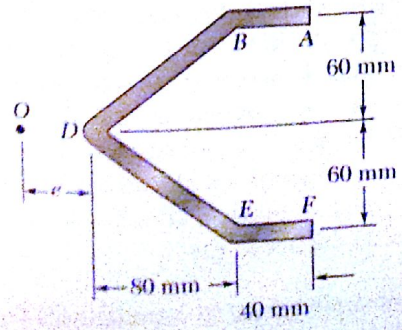


Figura P6.72

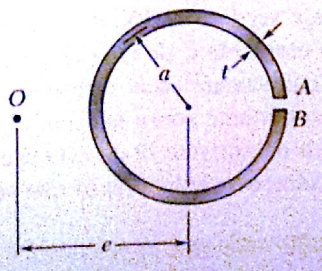


Figura *P6.73*

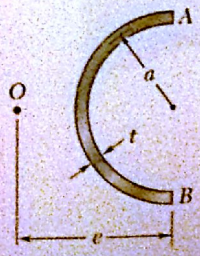


Figura *P6.74*

6.75 y 6.76 Una viga de pared delgada con espesor uniforme tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la localización del centro de cortante O de la sección transversal.

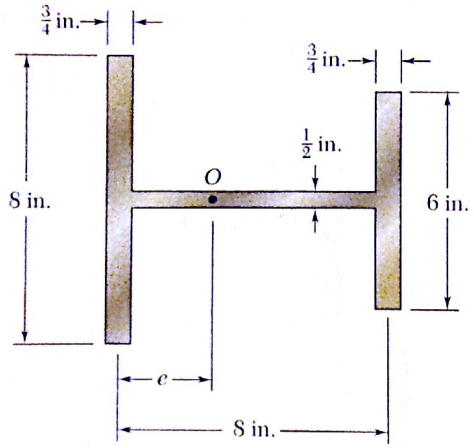


Figura P6.75

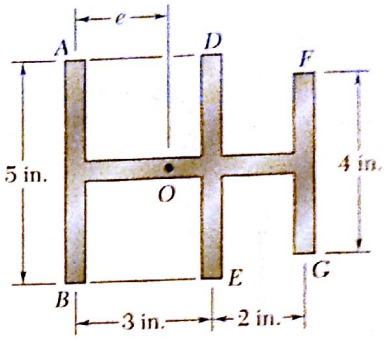


Figura P6.76

6.77 y 6.78 Una viga de pared delgada con espesor uniforme tiene la sección transversal que se muestra en la figura. Determine la dimensión b para la cual el centro de cortante O de la sección transversal se localiza en el punto indicado.

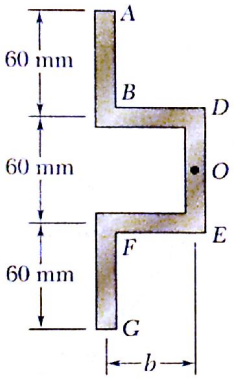


Figura P6.77

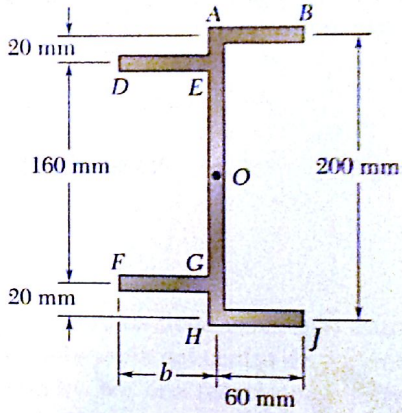


Figura P6.78

6.79 Para el perfil angular y la carga del problema modelo 6.6, verifique que $\int q\,dz = 0$ a lo largo del patín horizontal del ángulo y que $\int q\,dy = P$ a lo largo de su rama vertical.

6.80 Para el perfil angular y la carga del problema modelo 6.6, *a*) determine los puntos donde el esfuerzo cortante es máximo y los valores correspondientes de esfuerzo, *b*) verifique que los puntos obtenidos se encuentran localizados sobre el eje neutro correspondiente a la carga dada.

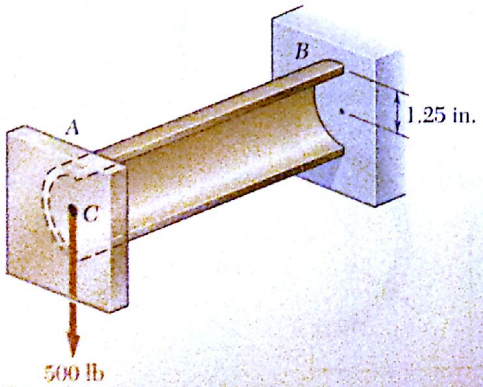


Figura P6.81

***6.81** La viga en voladizo AB que consiste en la mitad de un tubo de pared delgada con un radio medio de 1.25 in. y un espesor de pared de $\frac{3}{8}$ in., se somete a una carga vertical de 500 lb. Si se sabe que la línea de acción de la carga pasa a través del centroide C de la sección transversal de la viga, determine *a*) el sistema par-fuerza equivalente en el centro de cortante de la sección transversal, *b*) el máximo esfuerzo cortante sobre la viga. (*Sugerencia*: Se demostró en el problema 6.74 que el centro de cortante O de esta sección transversal se localiza al doble de distancia de su diámetro vertical de lo que se encuentra su centroide C.)

***6.82** Retome el problema 6.81, y ahora suponga que el espesor de la viga se reduce a $\frac{1}{4}$ in.

***6.83** La viga en voladizo que se muestra en la figura consta de un perfil Z de $\frac{1}{4}$ in. de espesor. Para la carga dada, determine la distribución de los esfuerzos cortantes a lo largo de la línea $A'B'$ en el ala horizontal superior del perfil Z. Los ejes x' y y' son los ejes centroidales principales de la sección transversal y los momentos de inercia correspondientes son $I_{x'} = 166.3$ in.^{4} e $I_{y'} = 13.61$ in.^{4}

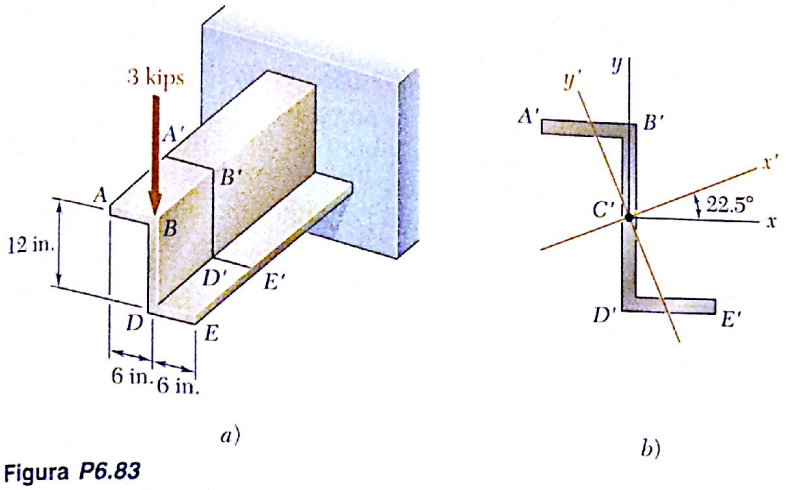
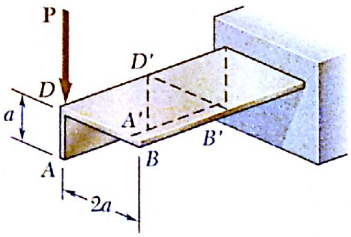


Figura *P6.83*

***6.84** Para la viga en voladizo y la carga del problema 6.83, determine la distribución de los esfuerzos cortantes a lo largo de la línea $B'D'$ en el alma vertical del perfil Z.

***6.85** Para la carga mostrada, determine la distribución de los esfuerzos cortantes a lo largo de la línea $D'B'$ en el patín horizontal del perfil angular que se muestra en la figura. Los ejes x' y y' son los ejes centroidales principales de la sección transversal.

***6.86** Para el perfil angular y la carga del problema 6.85, determine la distribución de los esfuerzos cortantes a lo largo de la línea $D'A'$ en el patín vertical.



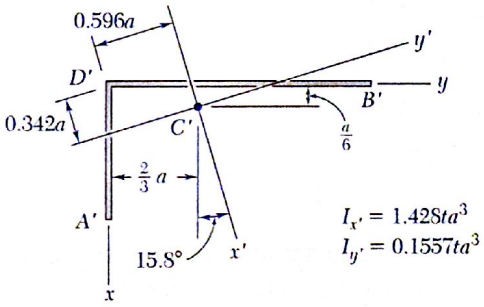


Figura P6.85

***6.87** Una placa de acero, con 160 mm de ancho y 8 mm de grosor, se dobla para formar el canal mostrado en la figura. Si se sabe que la carga vertical **P** actúa en un punto del plano medio del alma del canal, determine *a*) el par de torsión **T** que causaría que el canal se torciera de la misma forma que lo hace bajo la carga **P**, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el canal causado por la carga **P**.

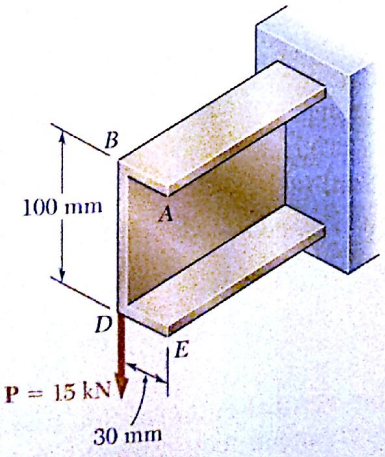


Figura P6.87

***6.88** Retome el problema 6.87, y ahora suponga que, para formar el canal mostrado en la figura, se dobla una placa con 6 mm de espesor.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 6

Este capítulo se dedicó al análisis de vigas y de elementos de pared delgada sometidos a cargas transversales.

Esfuerzos en un elemento de viga

En la sección 6.1 se consideró un pequeño elemento localizado en el plano vertical de simetría de una viga bajo carga transversal (figura 6.2) y se encontró que los esfuerzos normales σ_x y los esfuerzos cortantes τ_{xy} se ejercen en las caras transversales de dicho elemento, mientras que los esfuerzos cortantes τ_{yx}, con igual magnitud que τ_{xy}, se ejercen en sus caras horizontales.

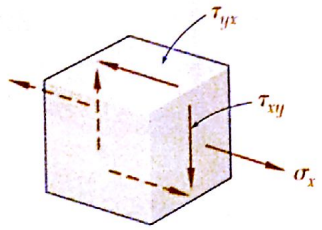


Figura 6.2

En la sección 6.2 se consideró una viga prismática AB con un plano vertical de simetría que soporta varias cargas concentradas y distribuidas (figura 6.5). A una distancia x desde el extremo A se desprendió de la viga un elemento $CDD'C'$ de longitud Δx que se extiende por el ancho de la viga desde la superficie superior de ella hasta un plano horizontal localizado a una distancia y_1 desde el eje neutro (figura 6.6). Se encontró que

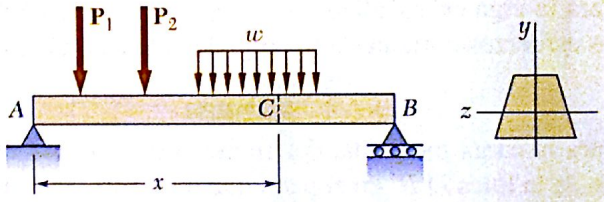


Figura 6.5

Cortante horizontal en una viga

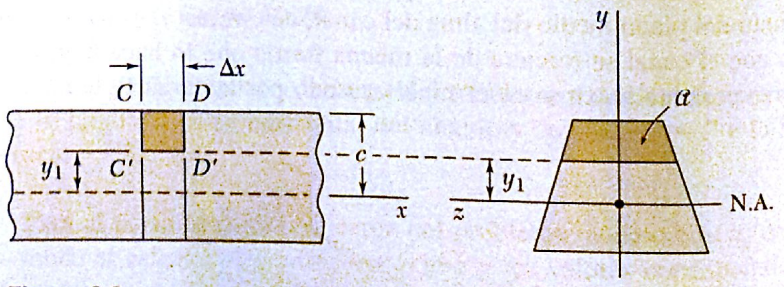


Figura 6.6

la magnitud de la fuerza cortante $\Delta \mathbf{H}$ ejercida sobre la cara inferior del elemento de viga es

$$\Delta H = \frac{VQ}{I}\Delta x \tag{6.4}$$

donde V = cortante vertical en la sección transversal dada
Q = primer momento con respecto al eje neutro de la sección sombreada $\mathcal{A}$ de la sección
I = momento centroidal de inercia de toda el área de la sección transversal.

El *cortante horizontal* por *unidad de longitud*, o *flujo cortante*, que fue representado por la letra q, se obtuvo dividiendo ambos miembros de la ecuación (6.4) entre Δx:

Flujo cortante

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \tag{6.5}$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación (6.4) entre el área ΔA de la cara horizontal del elemento y observando que $\Delta A = t\,\Delta x$, donde t es el espesor del elemento en el corte, se obtuvo en la sección 6.3 la siguiente expresión para el *esfuerzo cortante promedio* sobre la cara horizontal del elemento

Esfuerzos cortantes en una viga

$$\tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \tag{6.6}$$

Se advirtió además que, como los esfuerzos cortantes τ_{xy} y τ_{yx} ejercidos respectivamente sobre un plano transversal y uno horizontal a través de D' son iguales, la expresión en la ecuación (6.6) también representa el valor promedio de τ_{xy} a lo largo de la línea $D'_1 D'_2$ (figura 6.12).

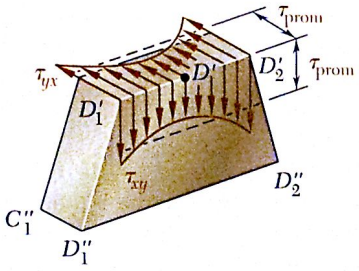


Figura 6.12

En las secciones 6.4 y 6.5 se analizaron los esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal rectangular. Se encontró que la distribución de esfuerzos es parabólica y que el máximo esfuerzo, que ocurre en el centro de la sección, es

Esfuerzos cortantes en una viga de sección transversal rectangular

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{6.10}$$

donde A es el área de la sección rectangular. Para vigas con patines anchos, se encontró que una buena aproximación al esfuerzo cortante máximo puede obtenerse al dividir el cortante V entre el área transversal del alma.

En la sección 6.6 se mostró que las ecuaciones (6.4) y (6.5) aún pueden utilizarse para determinar, respectivamente, la fuerza cortante longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ y el flujo cortante q ejercidos sobre un elemento de viga si el elemento se encuentra limitado por una superficie curva arbitraria en lugar de un plano horizontal (figura 6.24). Esto permitió extender el uso, en

Cortante longitudinal en una superficie curva

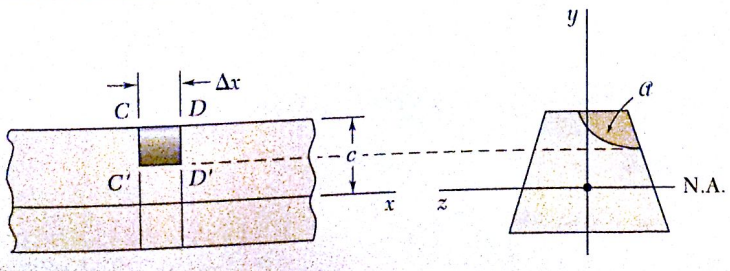


Figura 6.24

la sección 6.7, de la ecuación (6.6) para determinar el esfuerzo cortante promedio en elementos de pared delgada como las vigas de patín ancho y las vigas de caja, en los patines de dichos elementos y en sus almas (figura 6.32).

Esfuerzos cortantes en los elementos de pared delgada

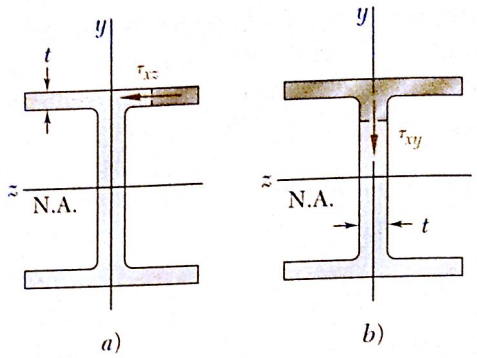


Figura 6.32

Deformaciones plásticas

En la sección 6.8 se consideró el efecto de las deformaciones plásticas sobre la magnitud y distribución de los esfuerzos cortantes. Del capítulo 4 se recordó que una vez iniciada la deformación plástica, la carga adicional provoca que las zonas plásticas penetren en el núcleo elástico de una viga. Tras demostrar que los esfuerzos cortantes pueden ocurrir sólo en el núcleo elástico de la viga, se advirtió que tanto un incremento en la carga como un decremento resultante en el tamaño del núcleo elástico contribuyen al incremento en los esfuerzos cortantes.

Carga asimétrica
Centro de corte

En la sección 6.9 se consideraron elementos prismáticos *sin* carga sobre su plano de simetría y se observó que, en general, ocurrirán tanto flexión como torsión. Se aprendió a localizar el punto O de la sección transversal, conocido como el *centro de corte*, donde las cargas deberán aplicarse si el elemento ha de doblarse sin torcerse (figura 6.49) y se encontró que si las cargas se aplican en dicho punto, la siguiente ecuación permanece válida:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \tau_{\text{prom}} = \frac{VQ}{It} \qquad (4.16, 6.6)$$

Utilizando el principio de la superposición, también se explicó cómo determinar los esfuerzos en elementos de pared delgada como canales, ángulos y vigas extruidas [véase ejemplo 6.07 y problema modelo 6.6].

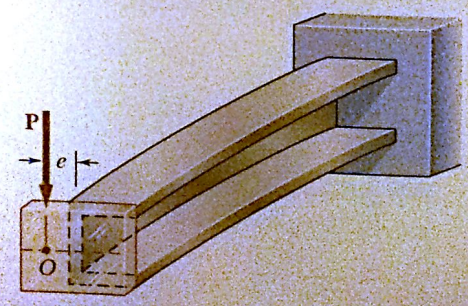


Figura 6.49

PROBLEMAS DE REPASO

6.89 Tres tablas, cada una con una sección transversal rectangular de 1.5 × 3.5 in., se clavan para formar una viga sometida a un corte vertical de 250 lb. Si se sabe que el espaciamiento entre cada par de clavos es de 2.5 in., determine la fuerza cortante en cada clavo.

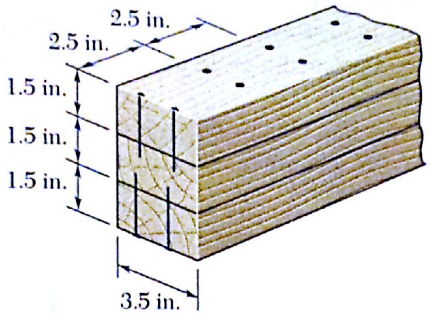


Figura P6.89

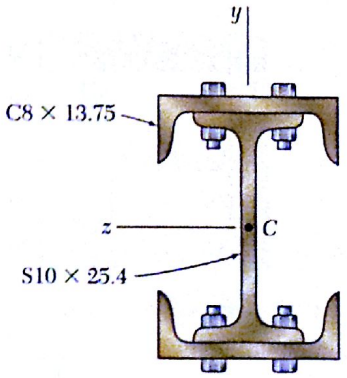
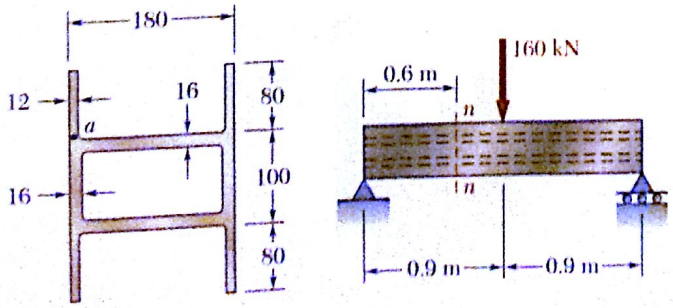


Figura *P6.90*

6.90 Una columna se fabrica al conectar los elementos de acero laminado mostrados en la figura mediante pernos de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro espaciados longitudinalmente cada 5 in. Determine el esfuerzo cortante promedio sobre los pernos causado por una fuerza cortante de 30 kips paralela al eje *y*.

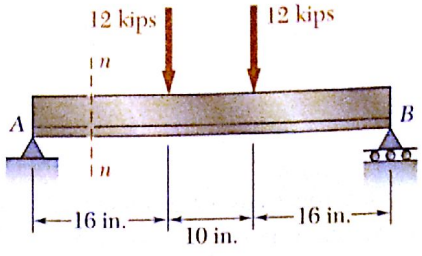
6.91 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, considere la sección *n-n* y determine *a*) el máximo esfuerzo cortante en dicha sección, *b*) el esfuerzo cortante en el punto *a*.



Dimensiones en mm

Figura P6.91

6.92 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, considere la sección *n-n* y determine el esfuerzo cortante en *a*) el punto *a*, *b*) el punto *b*.



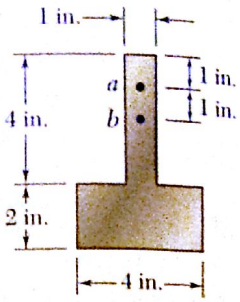
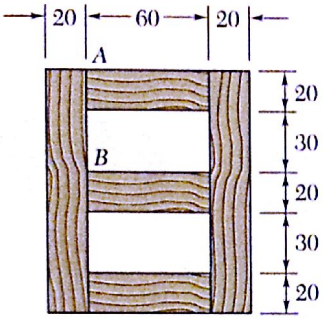


Figura P6.92



Dimensiones en mm

Figura P6.94

6.93 Para la viga y las cargas que se muestran en el problema 6.92, determine el esfuerzo cortante máximo en la sección *n-n*.

6.94 Algunas tablas se pegan para formar la viga tipo caja que se muestra en la figura. Si se sabe que la viga está sometida a un cortante vertical de 3 kN, determine el esfuerzo cortante promedio en la junta pegada *a*) en *A*, *b*) en *B*.

6.95 Si se sabe que una viga de acero laminado W360 × 122 está sujeta a un cortante vertical de 250 kN, determine el esfuerzo cortante *a*) en el punto *a*, *b*) en el centroide *C* de la sección.

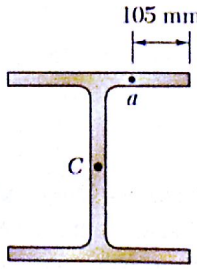


Figura *P6.95*

6.96 Una viga consiste en cinco tablas con sección transversal de 1.5 × 6 in. conectadas mediante pernos de acero con un espaciamiento longitudinal de 9 in. Si se sabe que el cortante en la viga es vertical e igual a 2 000 lb, y que el esfuerzo cortante promedio permisible en cada perno es de 7 500 psi, determine el mínimo diámetro permisible que puede utilizarse para los pernos.

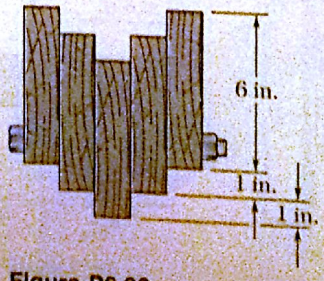
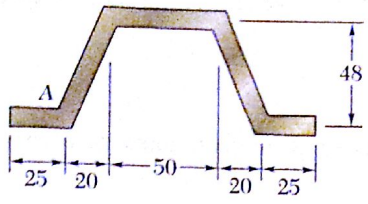


Figura P6.96

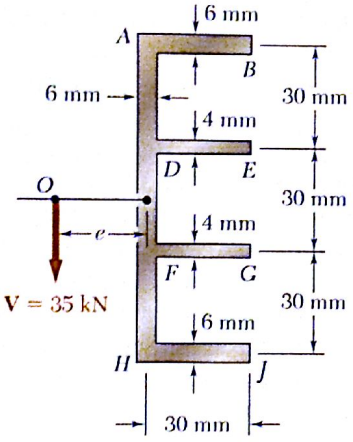
6.97 Una placa de 4 mm de espesor se dobla como lo muestra la figura y después se emplea como viga. Para un cortante vertical de 12 kN, determine *a*) el esfuerzo cortante en el punto *A*, *b*) el esfuerzo cortante máximo en la viga. También elabore un esquema del flujo cortante en la sección transversal.



Dimensiones en mm

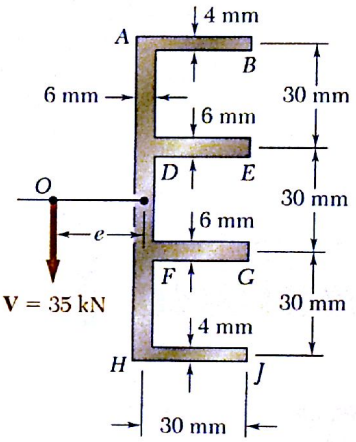
Figura P6.97

6.98 y *6.99* Para una viga extruida que tiene la sección transversal mostrada, determine *a*) la localización del centro de cortante *O*, *b*) la distribución de los esfuerzos cortantes causados por la fuerza cortante vertical **V** que se muestra en la figura y que se aplica en *O*.



$I_z = 1.149 \times 10^6$ mm^4

Figura P6.98



$I_z = 0.933 \times 10^6$ mm^4

Figura *P6.99*

6.100 Determine la localización del centro de cortante *O* de una viga de pared delgada con espesor uniforme que tiene la sección transversal mostrada en la figura.

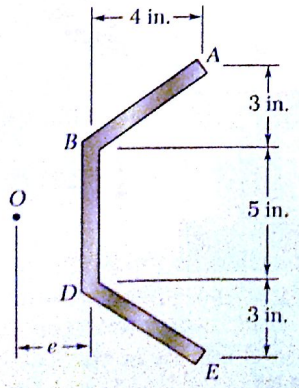


Figura P6.100